RÉSEAU IBNGHAZI

MP* 1 (Rabat)
Groupe 2

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُّونِي مُولَاي اسْمَاعِيل

Séries numériques

Partie II : Les Classiques

Personnalité du jour *Riemann*

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle. On lui doit entre autres les notion de Surface de Riemann, Sphère de Riemann, , Intégrale de Riemann, Hypothèse de Riemann, Somme de Riemann, Théorème de représentation de Riemann, Fonction zêta de Riemann, Théorème de réarrangement de Riemann,...

1 Séries numériques

Exercice 1 *Étudier la nature de la série de terme général.*
Calculer sa somme (dans le cas possible)

1) $u_n = \ln(1 + \frac{2}{n(n+3)})$
2) $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$.
3) $u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)^\alpha + (-1)^n}$, *où* α *un nombre réel,*
4) $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$
5) $u_n = \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1}\sin(n\theta)$ *où* $\theta \in \mathbb{R}$ *est fixe.*
6) $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ *où* $\alpha > 1$.
7) $u_n = \sin(\sqrt{n^2+a^2}\pi)$ *avec* a *un réel positif donné.*
8) $u_n = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}dx$.
9) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$. *où* α, β *deux nombres réels tels que* $\alpha \neq \beta$.
10) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sin(n) + \sqrt{n}}$.
11) $u_n = \ln(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}})$, *où* a *réel positif.*
12) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
13) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
14) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$

Exercice 2 Calcul de sommes

Calculer les sommes des séries suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$.

Réponse: $\dfrac{3}{4}$.

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Réponse: $\dfrac{1}{4}$.

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$.

Réponse: $S_p-(p+1)S_{p+1}=S_p-\dfrac{1}{(p+1)!}\Longrightarrow S_p=\dfrac{1}{pp!}$.

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^3+8k^2+17k+10}$.

Réponse: $\dfrac{23}{144}$.

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$.

Réponse: $\ln 3$.

6) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Réponse: $-\ln 2$.

7) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\ln\left(\cos\frac{\alpha}{2^k}\right)$.

Réponse: $\ln\left(\dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$.

8) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\tan(2^{-k}\alpha)$.

Réponse: $\dfrac{1}{\alpha}-2\mathrm{cotan}(2\alpha)$.

9) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k^3-3k^2+1}{(k+3)!}$.

Réponse: $109-40e$.

10) $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty}C_n^p x^n$.

Réponse: $\dfrac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$ *pour* $|x|<1$ *par récurrence.*

11) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}$.

Réponse: $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ *si* $|x|<1$, $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ *si* $|x|>1$.

12) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-n[k/n]}{k(k+1)}$.

Réponse: $\displaystyle S_n=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{r}{(qn+r)(qn+r+1)}=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{r}{qn+r}-\frac{r}{qn+r+1}$.

$$S_n=\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{1}{qn+1}+\frac{1}{qn+2}+\dots+\frac{1}{qn+n}-\frac{1}{q+1}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{(N+1)n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k}\right)=\ln n.$$

Exercice 3 *On considère les deux suites a et b définies par $a_0,b_0\in\mathbb{R}$ et $\forall n\geqslant 0$:*

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)\\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\end{cases}$$

1) *Montrer que a converge vers une limite l que l'on explicitera*

2) *On pose $u_n=a_n-b_n$.*

a) *Majorer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la vitesse de convergence de u.*

b) *Nature de la série* $\displaystyle\sum_n(a_n-l)$

Exercice 4 *Montrer que* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ *existe et donner sa valeur. Que dire de* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ *?*

Exercice 5 *On pose* $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ *et* $v_n = \ln(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})$.

1) *Montrer que* $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$ *converge.*

2) *En déduire l'existence d'une constante* $C > 0$ *tel que* $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C(\dfrac{n}{e})^n\sqrt{n}$.

3) *A l'aide des intégrales de Wallis , Déterminer* C.

Exercice 6 *On pose* $R_k = \sum\limits_{n\geq k+1} \dfrac{(-1)^n}{n}$

1) *Justifier l'existence de* R_k.

2) *Étudier la convergence absolue de la série* $\sum\limits_{k\geq 1} R_k$.

3) *Quel est le signe de* R_k *? Étudier la convergence de la série* $\sum\limits_{k\geq 1} R_k$.

Exercice 7 *Soient* a, b, c *trois nombres entiers positifs et* z *un nombre complexe de module strictement inférieur* 1. *Montrer que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^{cn}}{1-z^{an+b}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^{bn}}{1-z^{an+c}}$.

Exercice 8 *Pour* $s \in \mathbb{R}$, *posons* $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^s}$ *et* $\zeta_a(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^s}$. *Soient* $2 = p_1 < p_2 < .. < p_n < ..$ *la suite des nombres premiers.*

1) *Exprimer* $\zeta_a(s)$ *en fonction de* $\zeta(s)$ *pour* $s > 1$.

2) *Donner un développement asymptotique deux termes de* $\zeta(s)$ *lorsque* $s \to 1^+$.

3) *Montrer que* $\forall s > 1$, $\zeta(s) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 - p_n^{-s})^{-1}$.

4) *Pour* $s > 1$, *la série* $\sum\limits_{n\geq 1} p_n^{-s}$ *est-elle convergente ? La série* $\sum\limits_{n\geq 1} p_n^{-1}$ *est-elle convergente ?*

Exercice 9 .

1) *Montrer qu'il existe un rel* A *tel que* $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{2} ln^2(n) + A + o(1)$.

2) *En déduire qu'il existe un rel* C *tel que* $\prod\limits_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} Cn^{\frac{\ln(n)}{2}}$

Exercice 10 *Calculer* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-1)!(n+1)}$

Exercice 11 .

1) *Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ *(on pourra calculer* $\displaystyle\int_0^1 t^{2k}dt$*)*

2) *Nature de la série* $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(\tan(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}))$

Exercice 12 *Soit* $\alpha > 0$, *on pose* $R_n = \sum\limits_{p=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{p-1}}{p^\alpha}$.
Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} R_n$ *lorsque* $\alpha \geqslant 1$ *puis lorsque* $0 < \alpha < 1$.

Exercice 13 *On considère la suite x définie par $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{x_n}$ avec $x_0 > 0$.*

1) *Déterminer la limite de x.*
2) *Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{\sqrt{x_n}}$.*
3) *Déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \to +\infty$ (on pourra introduire $v_n = \ln x_n$)*

Exercice 14 *Soient deux entiers $p, q > 0$. On pose $u_n = \dfrac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}$.*

1) *Montrer que : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow p+1<q$*
2) *Montrer que dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{q-1}{q-p-1}$*

Exercice 15 *Soit un rel $\beta > 0$. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\beta}$. On note S_n les sommes partielles de cette dernière.*

1) *Montrer que $S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{1+t}dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+\beta}}{1+t}dt$*
2) *Montrer que la série $\sum u_n$ converge et que sa somme est $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{1+t}dt$*
3) *Traiter les cas où $\beta = 1, 1/2, 1/3$. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$*

Exercice 16 *Soit $s > 1$. Exprimer après avoir justifié son existence, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}$ en fonction de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$*

Exercice 17 *On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.*

1) *Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f atteint un et un seul extremum local sur $]n\pi, (n+1)\pi[$ en un point qu'on notera a_n. On pose en outre $m_n = f(a_n)$.*
2) *Montrer que $a_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \theta_n$ où θ_n tend vers 0 en décroissant.*
3) *Monter que la série $\sum m_n$ converge.*

Exercice 18 *Soit un rel $a > 1$, $d(n)$ désignera le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de l'entier n. étudier la série $\sum a^{d(n)}$*

Exercice 19 *Convergence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} E\left(\log_2(n)\right)$*

Exercice 20 *Soit $s > 1$. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{sE(x)}{x^{s+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$*

Exercice 21 *On pose* $A_n = 1 + \sqrt{2} + \cdots \sqrt{n}$.

1) *Montrer en utilisant la croissance de la racine carre que :* $A_n = \dfrac{2}{3}n^{3/2} + O(\sqrt{n})$.

2) *Utiliser la concavité de la racine carre pour montrer que :*

$$\sqrt{n} \leq \int_{n-1/2}^{n+1/2} \sqrt{t}\ dt \quad \text{et} \quad \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leqslant 2\int_{n}^{n+1} \sqrt{t}\ dt$$

3) *En déduire que* $A_n = \dfrac{2}{3}n^{3/2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{n} + O(1)$

Exercice 22 *Soient* $\sum u_n$ *une série de nombres complexes dont la suite des sommes partielles* $(S_n)_n$ *est borne et* $(a_n)_n$ *une suite réelle décroissante et convergeant vers 0.*
En utilisant la relation, dite transformation d'Abel :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k u_k = a_{n+1}S_n - a_m S_{m-1} - \sum_{k=m}^{n}(a_{k+1} - a_k)S_k$$

montrer que la série $\sum a_n u_n$ *est convergente.*

Application : *Étudier la convergence de la série* $\sum \dfrac{e^{ian}}{n^{\alpha}}$ *o* $a, \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 23 **Règle de Raabe-Duhamel**

Soit une suite réelle (a_n) *termes strictement positifs. On suppose que* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{s}{n} + o(\dfrac{1}{n})$

1) *En considérant la suite* $b_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^s u_{n+1}}{n^s u_n}\right)$, *montrer qu'il existe* $k > 0$ *tel que* $u_n \sim \dfrac{k}{n^s}$

2) *En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de* $\sum u_n$

Exemple : *étudier la série de terme général* $u_n = \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ 2n \end{pmatrix}}{2^{2n}}$

Exercice 24 *Soit* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

1) *Montrer que pour toute matrice inversible* $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$

2) *Montrer que* $\det\left(e^A\right) = e^{tr(A)}$

3) *Justifier que ce dernier résultat reste valable dans le cas où* A *est une matrice réelle.*

Exercice 25 *Soit* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

1) *On suppose que* A *est diagonalisable de valeurs propres* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$. *Soit* P *un polynôme vérifiant :* $\forall i \in [\![1, p]\!],\ P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.
Justifier l'existence d'un tel polynôme.
Montrer que $e^A = P(A)$.

2) A *tant quelconque, montrer qu'il existe un polynôme* P *tel que* $e^A = P(A)$.

Exercice 26 *Soit* E *l'espace vectoriel* $\mathcal{C}([0,1], R)$ *muni de la norme de la convergence uniforme* $\|.\|_\infty$. *Pour tout* $f \in E$ *on pose* $T(f) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f(1/n)$

1) *Montrer que* T *définit une forme linaire continue de* E. *Calculer sa norme et montrer qu'elle n'est pas atteinte.*

2) *On considère l'hyperplan affine* H *de* E *d'équation :* $T(f) = 1$. *Montrer que* $d(0, H)$ *n'est pas atteinte dans* H.

Exercice 27 *$\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est muni d'une norme d'algèbre $\|.\|$.*

1) *Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < 1$, montrer que la série $\sum(-1)^n A^n$ converge et donner sa somme.*
2) *Montrer que $GL_p(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$*

Exercice 28 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ soit convergente mais non absolument convergente. On veut montrer que pour tout rel x il existe une suite (ε_n) valeurs dans $\{-1,1\}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n = x$*

1) a) *On pose $v_n = |u_n|$, Construire une suite (α_n) valeurs dans $\{-1,1\}$ telle que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}\,, |S_{n+1}| \leqslant \max\left(|S_n|, v_{n+1}\right) \qquad \text{où } S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k v_k$$
   b) *Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n v_n = 0$*
2) *Conclure*

Exercice 29
Calculer les sommes de séries suivantes après en avoir prouvé la convergence :

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;
2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$;
3) $\sum u_n$ *où* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$, *et* $0 < a < b$; *il faut déterminer a et b pour que la série converge ;*
4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})}$.

Exercice 30
Soit $(a_n)_n$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n^n = a > 0$.
Étudier la série $\sum_n \frac{1-a_n}{n}$.

Exercice 31
On se donne $p \in \mathbb{R}_+^*$. Nature de la série du terme général :
$$u_n = n^\alpha \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{\ln(k+p)}$$

Exercice 32
Nature des séries de termes général :

1) $I_n = \int_n^{+\infty} \frac{e^{n-x}}{n+x}\mathrm{d}x.$
2) $J_n = (-1)^n \int_0^1 \cos(nt^2)\mathrm{d}t$

Exercice 33

Soit f de classe C^1 sur l'intervalle $[0, a], (a \geqslant 1)$. On suppose que f n'est pas identiquement nulle au voisinage de a.

Ètudier la convergence de $\sum u_n$, o : $u_n = \displaystyle\int_0^a t^n f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 34

Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{e^{x_n}-1}{x_n} = \frac{n+1}{n}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n$, et la nature de la série $\sum x_n$.

Exercice 35

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on note $r_n = \displaystyle\sum_{n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$. Étude de la série $\sum r_n$.

Exercice 36

On pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Nature de la série $A_nB_n - 1$.

Exercice 37

On définit la suite (u_n) de réels par u_0 et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$.

1) *Pour quelles valeurs de u_0 la série de terme général u_n converge-t-elle ?*

2) *Montrer que, dans ce cas, si la suite $(2^n u_n)$ n'est pas la suite nulle, elle converge vers une limite $l \neq 0$. Trouver alors un développement asymptotique deux termes de u_n.*

Exercice 38

Soit f une application continue de $[0, a]$ dans lui même admettant un développement limité $f(x) = x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha)$ droite de 0, avec $\lambda > 0$ et alpha > 1.

Pour simplifier, nous supposerons que, pour tout $x > 0, 0 < f(x) < x$ (ce qui est de toute manière vraie localement droite de 0).

On considère la suite définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = f(u_n)$.

1) *Montrer que (u_n) tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.*
Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra chercher un réel β tel que la suite de terme général $v_n = u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ ait une limite non nulle.

2) *Pour quelles valeurs de λ, α et γ la série $\sum n^\gamma u_n$ converge-elle ?*

3) *Application numérique : nature de la série $\sum u_n$ où $u_0 \in]0, \frac{\pi}{0}[$, et $u_{n+1} = \sin(u_n)$*

Exercice 39

Soit une série terme général u_n positif, divergente, de somme partielle S_n, avec $u_0 > 0$. Étudier, pour $\alpha > 0$, la nature de la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$.

Exercice 40 **Cauchy-Schwarz.**

Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.

1) *Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.*

2) *Montrer que $\sum (u_n + v_n)^2$ converge et : $\sqrt{\sum (u_n + v_n)^2} \leq \sqrt{\sum u_n^2} + \sqrt{\sum v_n^2}$.*