RÉSEAU IBNGHAZI
Classe MP*1
Groupe 2

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Feuille d'exercices N° 2: Structure de groupe

Le Groupe Orthogonal

Définition 1 : Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.
On dit que f est une isométrie vectorielle de E si f préserve la norme :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|$$

Théorème 1 : Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.
Montrer que
f est une isométrie de E si, et seulement si, f conserve le produit scalaire.

Théorème 2 : Soient E un espace euclidien et s une isométrie de E.
Montrer que s est un automorphisme de E appelé automorphisme orthogonal de E.

Théorème 3 : Soient $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ et B une base orthonormée de E. Montrer que

$$f \text{ isométrie vectorielle de } E \quad \Leftrightarrow \quad f(B) \text{ est une base orthonormée de } E$$

Théorème3 1: Soit E un espace euclidien. Montrer que
L'ensemble des isométries vectorielles de E, noté $\mathrm{O}(E)$, est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ de E appelé groupe orthogonal de E.

Définition 3 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(R)$
A est une matrice orthogonale si A est inversible d'inverse ${}^tA$

Théorème 4 : Soient E un espace euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$ et B une base orthonormée de E.
Montrer que $\quad f$ isométrie vectorielle $\quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_B(f)$ orthogonale

Théorème 5 : Soit B et B' deux bases orthonormées d'un espace euclidien E.
Montrer que
La matrice de passage $P_B^{B'}$ de B à B' est une matrice orthogonale.

Théorème 6 : L'ensemble des matrices orthogonales de taille n, notée $\mathrm{O}(n)$
Montrer que c'est
est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ appelé le groupe orthogonal de degré n.

Théorème6 1: Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et $f \in \mathrm{GL}(E)$ isométrie.

- On a alors $\det(A) = \pm 1$. Montrer que

  A est positive si $\det(A) = 1$ et négative si $\det(A) = -1$
- On a alors $\det(f) = \pm 1$.

  f est un isométrie positive si $\det(f) = 1$ et négative si $\det(f) = -1$

Exemple : Une réflexion est une isométrie négative.
Rappel : On appelle réflexion, toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan

Définition 5 : Soit E un espace euclidien de dimension n . Montrer que

- L'ensemble des automorphisme orthogonaux positifs de E, noté $\mathrm{SO}(E)$, est un sous groupe de $\mathrm{O}(E)$ appelé le groupe spécial orthogonal de E.
- L'ensemble des matrices orthogonales positives de taille n, noté $\mathrm{SO}(n)$, est un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$, appelé le groupe spécial orthogonal de degré n.

Théorème 7 : Dans $\mathrm{O}(2)$ le groupe orthogonale de degré 2. Montrer que

- Les matrices positives sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$
- Les matrices négatives sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$

Théorème 8 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et $f \in \mathrm{O}(2)$
Montrer que

- Si f est positive alors f est la rotation vectorielle r_θ d'angle de mesure θ

  Dans une base orthonormée directe, $\mathrm{Mat}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
- Si f est négative alors f est la réflexion vectorielle s_Δ par rapport à la droite Δ.

  Dans une base orthonormée directe, $\mathrm{Mat}(s_\Delta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Théorème9: Montrer que
Pour tous vecteurs unitaires u et v, il existe une et une seule rotation r pour laquelle $v = r(u)$ que l'on appelle angle orienté (u, v).

Tout réel θ pour lequel $\mathrm{Mat}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est appelé mesure de l'angle orienté $(u, v) = \theta\ [2\pi]$