MP* 1 (Rabat)
Groupe 2

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُّونِي مُولَاي اسْمَاعِيل

# Suites et Séries de Fonctions

## Partie II : Les Séries de Fonctions

**Exo 1**

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformémement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

**Exo 2**

Pour $x \in I = [0, 1]$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

1. Étudier la convergence simple sur $I$ de la série de terme général $u_n$. On notera dans la suite $S$ la somme de la série.
2. Étudier la convergence normale sur $I$ de la série de terme général $u_n$.
3. On suppose dans cette question que $a = 0$. Calculer $S$ sur $[0, 1[$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
4. On suppose $a > 0$. Démontrer que la convergence n'est pas uniforme sur $I$.

**Exo 3**

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

**Exo 4**

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

**Exo 5**

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} u_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

**Exo 6**

On considère la série de fonctions $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$.

**1.** Prouver que $S$ est définie sur $I=]-1,+\infty[$.
**2.** Prouver que $S$ est continue sur $I$.
**3.** Prouver que $S$ est dérivable sur $I$, calculer sa dérivée et en déduire que $S$ est croissante sur $I$.
**4.** Quelle est la limite de $S$ en $-1$? en $+\infty$?

**Exo 7**

Pour $x>0$, on pose $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+nx}$.

**1.** Justifier que $S$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
**2.** Déterminer la limite de $S$ en $+\infty$.
**3.** Établir que $S$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et déterminer $S'$.

**Exo 8**

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose $u_n(t)=\frac{\arctan(nt)}{n^2}$.

**1.** Justifier que pour tout $t\in\mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1}u_n(t)$ est convergente. On note $S(t)$ sa somme.
**2.** Démontrer que $S$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire.
**3.** Déterminer la limite de $S$ en $+\infty$ (on rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$).
**4.** Quel est le sens de variation de $S$?
**5.** Soit $N\in\mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un réel $t_0>0$ tel que, pour tout $t\in]-t_0,t_0[\setminus\{0\}$, on a

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{u_n(t)}{t}\geq\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

**6.** En déduire que la courbe représentative de $S$ admet une tangente verticale au point d'abscisse $0$.
**7.** Tracer la courbe représentative de $S$.

**Exo 9**

On appelle fonction $\zeta$ de Riemann la fonction de la variable $s\in\mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}.$$

**1.** Donner le domaine de définition de $\zeta$ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
**2.** Prouver que $\zeta$ est continue sur son domaine de définition.
**3.** Déterminer $\lim_{s\to+\infty}\zeta(s)$.
**4.** Montrer que pour tout entier $k\geq 1$ et tout $s>0$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s}\leq\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^s}\leq\frac{1}{k^s}.$$

En déduire que $\zeta(s)\sim_{1^+}\frac{1}{s-1}$.
**5.** Démontrer que $\zeta$ est convexe.
**6.** Tracer la courbe réprésentative de $\zeta$.

**Exo 10**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$. On note $S(x)$ sa somme.
2. Démontrer que $S$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la monotonie de $S$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer la limite de $S$ en $+\infty$.
5. Justifier que $S$ admet une limite en $0$. Démontrer que, pour tout entier $N$, on a

$$\lim_{x\to 0} S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

En déduire la valeur de $\lim_{x\to 0} S(x)$.

**Exo 11**

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$ et on note $f$ sa somme.

1. Quel est le domaine de définition de $f$?
2. Démontrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $C^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
3. On fixe $A > 0$.

   **3.1.** Justifier l'existence d'un entier $N \geq 1$ tel que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{1+n^2} \geq A.$$

   **3.2.** En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $h \in ]0,\delta[$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)} \leq -A+1.$$

   **3.3.** Démontrer que $f$ n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
4. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**Exo 12**

Soit la série de fonctions $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Démontrer que $S$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x > 0$ et $n \geq 1$. Justifier que

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2+t^2}dt \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{x^2+t^2}dt.$$

3. En déduire que $S$ admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

**Exo 13**

Sur $I = ]-1,+\infty[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

1. Montrer que $S$ est définie et continue sur $I$.
2. Étudier la monotonie de $S$.
3. Calculer $S(x+1) - S(x)$.
4. Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $-1^+$.
5. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
6. En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

**Exo 14** Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par $f_n(t)=\dfrac{1}{n}\,t^n\,\sin nt$.

**1.** Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.

**2.** Soit $a\in]0,1[$.

**2.1.** Montrer que la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$.

**2.2.** En déduire que la fonction $f=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et montrer que, pour $x\in]-1,1[$,

$$f'(x)=\frac{\sin x+x\cos x-x^2}{1-2x\cos x+x^2}.$$

**2.3.** Montrer que $f(t)=\arctan\dfrac{t\,\sin t}{1-t\,\cos t}$ pour $t\in]-1,1[$.

**3.** On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[-1,1]$, $A_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n} t^k\,\sin kt$.

**3.1.** Montrer qu'il existe $M>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[-1,1]$ on ait $|A_n(t)|\leqslant M$.

**3.2.** Montrer en écrivant $t^k\,\sin(kt)=A_k(t)-A_{k-1}(t)$ que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k\,\sin kt}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_k(t)}{k(k+1)}+\frac{A_n(t)}{n}.$$

**3.3.** En déduire que la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[-1,1]$ et que $f(t)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{A_k(t)}{k(k+1)}$ sur $[-1,1]$. Montrer que $f$ est continue sur cet intervalle.

**3.4.** En déduire les valeurs de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin n}{n}$ et de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n\,\sin n}{n}$.

**Exo 15** On considère la fonction $\mu(x)=\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

**1.** Quel est le domaine de définition de $\mu$?

**2.** Montrer que $\mu$ est de classe $C^\infty$ sur son domaine de définition.

**3.** Démontrer que $\mu$ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.

**4.** On souhaite démontrer que $\mu$ admet une limite en 0.

**4.1.** Démontrer que, pour tout $x>0$, on a

$$-1+2\mu(x)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right).$$

**4.2.** En déduire que pour tout $x>0$, on a

$$0\leq -1+2\mu(x)\leq 1-\frac{1}{2^x}.$$

**4.3.** Conclure.

**Exo 16** Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que, pour tout $k\geq 0$, on a $\int_a^b f(t)t^k dt=0$.

**1.** Rappeler le théorème de Stone Weirstrass

**2.** Démontrer que $\int_a^b f^2(t)dt=0$.

**3** En déduire que $f$ est la fonction nulle.



**FiN**