Feuille d'Exercices : Réduction

Advanced Level

Exo 1

Réduction de Jordan

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

1) Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$, nilpotent. Montrer que :

(a) $u^n = 0$

(b) Si r est l'indice de nilpotence, on a $\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \ker u^2 \ldots \subsetneq \ker u^r = E$

(c) $d_k = \dim \ker u^k$ est concave (et croissante) : $\forall k \in \mathbb{N}^*, d_{k+1} - d_k \leq d_k - d_{k-1}$

(d) En déduire qu' il existe une base $\mathfrak{B}$ de E telle que :

$$\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{k_1} & & & (0) \\ & J_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{k_p} \end{pmatrix} \quad \text{Où } J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{K}) \ (\text{et } J_1 = (0))$$

2) en déduire la décomposition de Jordan dans le cas général, où u est trigonalisable.

Exo 2

Trace de matrices nilpotentes

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], \operatorname{Tr}(A^k) = 0$

1) Montrer que 0 est valeur propre de A.

2) En déduire que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & l \\ \vdots & \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $B \in M_{n-1}(\mathbb{K})$.

3) Conclure que A est nilpotente

4) En déduire que Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) A est nilpotente

(2) $\forall k \in [\![1, n]\!], \operatorname{Tr}(A^k) = 0$

Exo 3

Notion de drapeaux

Vocabulaire

- Drapeaux de sous-espaces de E, où E est de dimension n finie :

C'est une suite $F_0 = \{0\} \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_n = E$ de sous-espaces de E avec $\forall i \in [\![1,n]\!], \dim F_i = i$

- Base adaptée à un drapeau $F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_n = E$:

C'est une base $(e_1,\dots e_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $(e_1,\dots e_k)$ est une base de F_k

1) Proposer une méthode théorique pour construire une base adpatée à un drapeau.

2) En déduire que Un endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si il existe un drapeau constitué de sous-espaces stables par u.

Exo 4

Crochet de Lie

Vocabulaire

On considère un espace vectoriel E, de dimension finie $n \geq 2$, sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E ; si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera noté simplement uv, $[u,v]$ désignera l'endomorphisme $uv - vu$ et l'identité se notera Id.

On définit l'application : $\Phi_u : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ v & \longmapsto & [u,v] \end{array}$

A- Cas où u est diagonalisable

Dans cette question on suppose que u est diagonalisable.
On pose $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$. Pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$, m_i désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i de u.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Pour simplifier les notations dans cette question, on pose $u(e_i) = \mu_i e_i \quad \forall\, i \in \{1,..,n\}$.

$(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, $u_{i,j}$ désigne l'endomorphisme de E tel que :

$$\forall k \in \{1,2,\dots,n\},\ u_{i,j}(e_k) = \delta_{jk} e_i.$$

a Montrer que $\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2 : \Phi_u(u_{i,j}) = (\mu_i - \mu_j) u_{i,j}$.

b En déduire que Φ_u est diagonalisable et préciser $\mathrm{Sp}(\Phi_u)$.

C- Cas où Φ_u est diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E tel que Φ_u soit diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_{n^2})$ une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de vecteurs propres de Φ_u de sorte que $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i$, $\forall i \in \{1,..,n^2\}$.
Soit enfin $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \in E$ un vecteur propre associé.

① Calculer $u(v_i(x))$ en fonction de λ, β_i et $v_i(x)$.

② Montrer que l'application $\Psi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow E$, $v \longmapsto v(x)$ est linéaire surjective.

③ Montrer alors que u est diagonalisable.

Exo 5 Crochet de Lie vs. Trace nulle

On définit l'application : $\Phi : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $(u,v) \mapsto [u,v]$

$\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E de trace nulle. Si u un endomorphisme non nul de E de trace nulle.

① u peut-il être une homothétie ?

② Montrer qu'il existe $e_1 \in E$ tel que la famille $(e_1, u(e_1))$ soit libre.

③ En déduire l'existence d'une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice A de u dans cette base soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$$

où $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

④ On suppose $A_1 = UV - VU$ avec $(U,V) \in (\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}))^2$

a Montrer qu'on peut trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que la matrice $U - \alpha I_{n-1}$ soit inversible.

b On pose $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V \end{pmatrix}$ avec $(R,S) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$; établir l'équivalence :
$A = U'V' - V'U' \iff [\ {}^tX = -{}^tR(U - \alpha I_{n-1})$ et $Y = (U - \alpha I_{n-1})S\ ]$.

⑤ Montrer alors par récurrence sur n que l'image de Φ est égale à $\mathcal{T}$.

Exo 6 Invariants de similitude et Decomposition de Frobenius

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ Pour tous $x \in E$, on note :

— $E_x = \{P(f)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ (sous-espace de E)

— P_x le générateur unitaire de l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$

— Π_f le polynôme minimal de f

On remarque immédiatement que pour tout x, on a $P_x | \Pi_f$.

Partie I

1) Montrer que si x et y vérifient $E_x \cap E_y = \{0\}$, alors $P_{x+y} = \text{ppcm}(P_x, P_y)$

2) Montrer que si x et y sont tels que P_x et P_y , alors $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$.

3) Montrer que Si M est un facteur irréductible de Π_f de multiplicité α , alors il existe $x \in \text{Ker}(M^\alpha(f))$ tel que $P_x = M^\alpha$

4) En déduire que il existe $x \in E$ tel que $P_x = \Pi_f$.

Partie II

On pose $k = \deg(\Pi_f)$ et on se donne $x \in E$ tel que $\Pi_f = P_x$

5) Montrer que E_x de E est stable par f, et qu'il est de dimension k

Indication : vérifier que, la famille des $(e_i)_{i \in [\![1;k]\!]}$ où, pour tout i, $e_i = f^{i-1}(x)$ en est une base.

Alors on note $F = E_x$, et on complète cette base en une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E. On note $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale associée, et on note $\Gamma = \{e_k^* \circ f^i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ (sous-espace de E^*), et $G = \Gamma^\circ$ son orthogonal au sens de la dualité. G est alors l'ensemble des vecteurs $y \in E$ tels que pour tout $i \in \mathbb{N}$, la k-ième composante de $f^i(y)$ dans la base B est nulle

6) Vérifier que G est stable par F.

7) Montrer que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \{Q(f) \,|\, Q \in \mathbb{K}[X]\} & \to & \mathrm{Vect}(\Gamma) \\ Q(f) & \mapsto & e_k^* \circ Q(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme

8) En déduire que $\dim(\mathrm{Vect}(\Gamma)) = k$, puis que $\dim(G) = n - k$

9) Conclure que $E = F \oplus G$:

Partie II

10) En déduire le théorème suivant

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe une suite $F_1, \dots, F_r$ de sous-espaces de E tous stables par f tels que :
>
> 1. $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$
> 2. Pour tout i, $f|_{F_i}$ est cyclique
> 3. Si on note P_i le polynôme minimal de $f|_{F_i}$, on a pour tout i, $P_{i+1} | P_i$.
>
> La suite des polynômes $P_1, \dots, P_r$ ne dépend que de f, et non des sous-espaces choisis. On les appelle les *invariants de similitude* de f.

11) En déduire que toute matrice est semblable à une matrice diagonale par bloc

, dont les blocs ont tous des matrices compagnons.