My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Feuille d'exercice N°3

Structure de groupe

Exercice 1 : Mines 2017

On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques. Une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ *non nul*, on a $X^T SX > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer qu'une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^{*+}$.
2. En déduire que pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = R^T R$. Réciproquement montrer que pour tout $R \in GL_n(\mathbb{R})$, $R^T R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

Exercice 1 : Mines 2019

Soit n un entier $\geqslant 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. La norme euclidienne associée est notée $\| \ \|$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on identifiera $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à coefficients réels. On note ${}^tX = (x_0\ x_1 \cdots x_{n-1}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ la matrice ligne transposée de la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Enfin, on note $\widetilde{X}$ la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k.$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la *matrice de Hilbert* $H_n = \left(h_{j,k}^{(n)}\right)_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $h_{j,k}^{(n)} = \frac{1}{j+k+1}$ pour tous $j, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

A. Une propriété de Perron-Frobenius

1) Montrer que la matrice H_n est symétrique réelle et définie positive. On pourra s'aider du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\widetilde{X}(t)\right)^2 dt$.

On note $\mathcal{V}$ le sous-espace propre de H_n associé à la plus grande valeur propre ρ_n de H_n.

2) Montrer que $X \in \mathcal{V}$ si et seulement si ${}^tX\, H_n\, X = \rho_n \|X\|^2$.

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$.

3) Établir l'inégalité ${}^tX_0\, H_n\, X_0 \leqslant {}^t|X_0|\, H_n\, |X_0|$ et en déduire que $|X_0| \in \mathcal{V}$.

4) Montrer que $H_n|X_0|$, puis que X_0, n'a aucune coordonnée nulle.

5) En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathcal{V}$.

B. Inégalité de Hilbert

Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et P un polynôme à coefficients réels.

6) En s'aidant du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta$, montrer l'inégalité $\displaystyle\left|\int_{-1}^1 P(t)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\pi \left|P(e^{i\theta})\right| \mathrm{d}\theta$, puis l'inégalité ${}^tX H_n X \leqslant \displaystyle\int_0^\pi \left|\widetilde{X}(e^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta$.

7) En déduire que ${}^tX H_n X \leqslant \pi \|X\|^2$.

8) Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et convergente.

Exercice 3 : Oral Mines 2023

1) Soit M une matrices antisymétrique réelle. Soit λ une valeur propre réelle de M. Montrer que $\lambda = 0$.

2) Soit $C : A \mapsto (A + I_n)^{-1}(A - I_n)$. Montrer que C est bien définie sur l'ensemble des matrices antisymétriques et à valeurs dans $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 4 : Oral Mines 2022

Soit G un groupe fini tel que $\forall x \in G, g^2 = e$.

<u>Question 1.</u> Montrer que G est abélien et qu'il est de cardinal une puissance de 2.

Indications. S'intéresser à xy avec $x, y \in G$. S'intéresser au plus grand sous-groupe de G de cardinal une puissance de 2 en le supposant plus petit que G.

Exercice 5 : Oral Mines 2022

Soit p un nombre premier. On pose: $G_p = \{z \in \mathbb{C}^*, \exists k \in \mathbb{N}, z^{p^k} = 1\}$.

1) Montrer que G_p est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

2) Soit H un sous-groupe de G_p, $H \neq G_p$, $H \neq \{1\}$.

Montrer que H est cyclique.