Exercices : $\mathcal{E}vn$

Dérivation et Intégration Vectorielles

Partie I : Dérivation Vectorielle

Exo 1

Soit $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto M(t)$ une fonction dérivable.

1. Démontrer que la fonction $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto M(t)M(t)^T$ est dérivable.
2. On suppose pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $M(t)$ est orthogonale. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M'(t)M(t)^T$ est antisymétrique.

Exo 2

Soit I un intervalle, E un espace vectoriel euclidien et $f : I \to E$ dérivable. On suppose de plus que f ne s'annule pas et on pose, pour tout $t \in I$, $g(t) = \|f(t)\|$. Démontrer que g est dérivable et donner g'.

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2/2 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $D_n'(x)$.
2. En déduire $D_n(x)$.

Exo 3 **Inégalité des accroissements finis pour un espace euclidien**

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f : [a,b] \to E$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. En considérant $\phi(t) = \langle f(b) - f(a), f(t)\rangle$, démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\|f(b) - f(a)\| \le (b-a)\|f'(c)\|.$$

Exo 4 **Inégalité des accroissements finis vectorielle**

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : [a,b] \to E$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables sur $[a,b]$ et que pour tout $t \in [a,b]$, $\|f'(t)\| \le g'(t)$. Soit $\varepsilon > 0$ et

$$A_\varepsilon = \{x \in [a,b];\ \forall t \in [a,x],\ \|f(t) - f(a)\| \le g(t) - g(a) + \varepsilon(t-a)\}.$$

1. Justifier que A_ε admet une borne supérieure, puis que $\sup(A_\varepsilon) \in A_\varepsilon$.
2. Démontrer que $\sup A_\varepsilon = b$.
3. En déduire que $\|f(b) - f(a)\| \le g(b) - g(a)$.

Partie II : Intégration Vectorielle

Exo 5 Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (1/\sqrt{1-t^2}, 2t)$ et $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$. Calculer

$$p\left(\int_0^{1/2} f(t)dt\right).$$

Exo 6 Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E, $f : [a,b] \to E$ une fonction continue par morceaux. On suppose que pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \in F$. Démontrer que $\int_a^b f(t)dt \in F$.

Soit $f : [a,b] \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = 0$. Démontrer que

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{t\in[a,b]} \|f'(t)\|.$$

Exo 7 **Norme d'une intégrale égale à l'intégrale de la norme**

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f : [a,b] \to E$ continue. On suppose que

$$\int_a^b \|f(t)\|dt = \left\|\int_a^b f(t)dt\right\|.$$

Exo 8 On note u le vecteur unitaire de E défini par

$$u = \frac{\int_a^b f(t)dt}{\int_a^b \|f(t)\|dt}.$$

Exo 9 Pour tout $t \in [a,b]$, on décompose $f(t)$ dans la somme directe $\mathbb{R}u \oplus^\perp (\mathbb{R}u)^\perp$ sous la forme $f(t) = \alpha(t)u + v(t)$.

1. Démontrer que α et v sont continues sur $[a,b]$.
2. Démontrer que $\int_a^b v(t)dt$ est orthogonal à u.
3. Démontrer que $\int_a^b \alpha(t)dt = \int_a^b \|f(t)\|dt$.
4. Démontrer que, pour tout $t \in [a,b]$, $\alpha(t) \leq \|f(t)\|$.
5. En déduire que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = \|f(t)\|u$.
6. Le résultat subsiste-t-il si on suppose pas que E est euclidien?

Exo 10 **Théorème du relèvement**

Soit $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle que $|f(t)| = 1$ pour tout $t \in I$. On souhaite prouver l'existence de $\alpha \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ telle que, pour tout $t \in I$, on ait

$$f(t) = e^{i\alpha(t)}.$$

1. Montrer que si α_1 et α_2 sont deux solutions du problème, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $t \in I$, $\alpha_1(t) = \alpha_2(t) + k2\pi$.
2. Soit $t_0 \in I$ et α_0 un argument de $f(t_0)$. En considérant

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{1}{i}\int_{t_0}^t \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

démontrer que le problème admet bien une solution.