MP* 1 (Rabat)
Groupe 1

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Feuille d'exercices
Intégrales à un paramètre

Exo 1

On pose $f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et calculer f'.
2) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f=0$.
3) En déduire une autre écriture de f.

Exo 2

$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t}dt$

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2) Montrer que f est C^1 sur $\mathcal{D}_f$ et calculer f'
3) Limites de f aux bornes

Exo 3

Étude et graphe de $x\mapsto\int_x^{x^2} e^{-t^2}dt$.

Exo 4

Soit $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$
2) Montrer que f est C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\lim_{0^+} f$
3) Calculer $f+f''$ puis montrer que $f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}dt$
4) En déduire que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=\frac{\pi}{2}$

Exo 5

On pose $f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin at}{1+t^2}$

1) Domaine de définition, continuité et dérivabilité de f.
2) Calculer f et f''. En déduire une équation différentielle satisfaite par f.
3) Expliciter f l'aide de fonctions usuelles.
4) Limite en $+\infty$ de f et f' En déduire f.

Exo 6

Soit $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}dt$.

Domaine de définition, continuité, dérivabilité, calcul de f' puis de f. Calculer $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$

Exo 7

On pose $u_n(x)=\frac{(-1)^n n}{n^2+x^2}$ et $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$.

1) Étudier l'ensemble de définition de f.
2) Calculer $f(0)$.
3) Montrer que f est C^∞.
4) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos(bt)\ dt$.
5) En déduire que $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos xt}{1+e^t}\ dt$.
6) Développer f en $+\infty$ sous la forme : $f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x^4}+o(\frac{1}{x^4})$.

Exo 8 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue tendant vers 1 en $+\infty$ et $f(0)=1$.
On pose $\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\left(\frac{\sin xt}{t}\right)^2 dt$ ainsi que $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt$.

1) Quel est le domaine de définition de ϕ ? Exprimer la limite L en 0^+ de $\dfrac{\phi(x)}{x}$ l'aide d'une intégrale.
2) Prouver que l'on a $L = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$.
3) Domaine de définition, continuité et dérivabilité de H.
4) Calculer H' puis expliciter H.

Exo 9 **Calcul de limite.**

1) a) Prouver l'existence pour $x>0$ de $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}dt$.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$.
   Indication: Développer $\sin(t-x)$.
2) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Chercher $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_0^1 \frac{xf(t)}{x^2+t^2}dt$.
   Indication: $\dfrac{\pi}{2}f(0)$.
3) Donner un équivalent pour $x \longrightarrow +\infty$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x^2+t^2}dt$.
   Indication: $t = ux$ puis intégration par parties.
4) Soit $a>0$. Donner le DL en $x=1$ l'ordre 3 de $f(x) = \displaystyle\int_{t=a/x}^{ax}\frac{\ln t}{a^2+t^2}dt$.
   Indication: Calculer $f'(x)$.
5) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue. On pose $\varphi(x) = \left(\displaystyle\int_{t=a}^{b}(f(t))^x\,dt\right)^{1/x}$.
   a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \max(f)$.
   b) On suppose $f>0$ et $b-a=1$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\exp\left(\displaystyle\int_{t=a}^{b}\ln(f(t))\,t\right)$.
   Indication: Montrer que pour $\varepsilon>0$ et x assez petit, $\left|f(t)^x - 1 - x\ln(f(t))\right| \leq \varepsilon x$ puis intégrer.
6) a) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,dt = f(0)$.
   Indication: Couper en $\displaystyle\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^1$
   b) Chercher un équivalent pour $n \longrightarrow +\infty$ de $\displaystyle\int_{t=0}^1 \frac{t^n\,dt}{1+t^n}$.

Exo 10 Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$.

1) Déterminer le domaine définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2) Montrer que f est C^1 sur $\mathcal{D}_f$
3) Montrer que f satisfait une équation différentielle du premier ordre sur $\mathcal{D}_f$.
4) En déduire une autre écriture pour f.

Exo 11 On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}dt$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{t^2+1}dt$.

1) Montrer que f et g sont définies et C^2 sur $]0,+\infty[$.
2) Montrer que f et g sont solutions de : $y''+y = \dfrac{1}{x}$.
3) Étudier les limites de f et g en $+\infty$.
4) Trouver une relation entre f et g.

Exo 12 On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}$

1) Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2) Montrer que f est C^1 sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_f$.
3) En déduire une autre écriture de f.