

Td Algèbre Générale
G1

Thème 1 : Radical d'un idéal et celui d'un agr

I) $(A, +, \cdot)$ est un anneau commutatif

et I un idéal de A

on pose $\sqrt{I} = \{ a \in A \text{ tq } \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } a^n \in I \}$
 $\uparrow$
 radical de I

1) Mq $\sqrt{I}$ est aussi un idéal de $(A, +, \cdot)$ et que $I \subset \sqrt{I}$

2) i) Donner $\sqrt{0_A}$

ii) En deduire $\text{Nir}(A) = \{ a \in A \text{ tq } a \text{ nilpotent} \}$
 est un idéal de A

Mq $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

Soit J un autre idéal de $(A, +, \cdot)$

Mq i) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$

ii) $\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$

iii) $I \subset J$
 $\Downarrow$

$\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$

i) Rappeler la def d'un idéal premier

ii) Mq I premier $\Rightarrow \sqrt{I}$ premier

iii) La réciproque est-elle vraie
 (qst ouverte)

1

II

Soit $(G, \cdot)$ un gpe multiplicatif abélien
Soit H un sgr de $(G, \cdot)$

on pose $\sqrt{H} = \{x \in G \text{ tq } \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tq } x^n \in H\}$
radical de H

1) Mg $\sqrt{H}$ est aussi un sgr de $(G, \cdot)$
et que $H \subset \sqrt{H}$

2) Donner $\sqrt{\{1\}}$

3) Mg $\sqrt{\sqrt{H}} = \sqrt{H}$

4) Parmi les résultats de I-4 quels
sont-qui sont encore vrais,
Justifier votre réponse

(Considérer
 K un autre
sgr de $(G, \cdot)$)

5) i) Donner $\sqrt{\{1\}}$ dans le cas $(G, \cdot) = (\mathbb{C}^\times, \cdot)$

ii) En déduire que a d'ordre fini dans $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$
ssi $\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ \text{ tq } a = e^{\frac{2ip\pi}{q}}$

6) i) On suppose que H est cyclique
Mg $\sqrt{H}$ est aussi cyclique

Faux

dans $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$
 $H = \{1\}$
 $\sqrt{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_n$

ii) la réciproque est-elle vraie? (question ouverte)

7) Mg la question 6 reste encore valable
dans le cas homogène

H fini, $\sqrt{H}$ infini
 H homogène, $\sqrt{H}$ non
 $\sqrt{H}$ infini
mais $\forall x \in \sqrt{H}$
 x d'ordre fini

(2)

Thème 2 : Action d'un groupe sur un ensemble

Soit $(G, *)$ un gpe et E un ensemble non vide
on dit que G agit sur E si on peut définir
sur E une loi de composition externe "à base de G "

cond $g \in G, x \in E \Rightarrow g.x \in E$
vérifiant les axiomes suivants

$$e_G.x = x \quad \forall x \in E$$

$$g.(h.x) = (g * h).x \quad \forall g, h \in G, \forall x \in E$$

1) Mg

i) tout sgr H de $(G, *)$ agit sur G grace à
la relation $g.x = g * x$ (translation)

ii)

$$g.x = g * x * g^{-1} \quad (\text{conjugaison})$$

iii) $S_n = \sigma_n$ agit sur $(1, n)$ grace à la
relation $\sigma.i = \sigma(i)$

2) Avec les notations ci-dessus on pose

$$O(x) = \{y \in E \mid \exists g \in G \text{ tq } y = g.x\}$$

orbite de x

i) Donner $O(x)$ dans chacun des cas ci-dessus

ii) Mg de ce cas où les orbites forment une partition de E

3) On suppose G fini et H sgr de G qui agit sur G
selon 1.-i)

i) Mg cond $O(x) = \text{Card } H \quad \forall x \in E$

ii) En deduire que $\text{Card } H$ divise $\text{Card } G$
(thm de Lagrange)

(3)

4) Une action est dite transitive quand elle admet une seule orbite : $\forall x \in G, \forall y \in G \exists g \in G$ tq $y = g \cdot x$

Si de plus g est unique on dit que l'action est simplement transitive

i) Mq l'action de $S_n = \mathcal{O}_n$ sur $(\{1, n\})$ selon 1-iii) est transitive, Est-elle simplement transitive

ii) Soit E un K -ev de dim fini
Mq $GL(E)$ agit simplement et transitivement sur $E = \{ \beta \text{ base de } E \}$

5) On suppose G agit sur E

on pose $\text{Stab}(x) = \{ g \in G \text{ tq } g \cdot x = x \}$

i) Que vaut $\text{Stab}(i)$ quand $S_n = \mathcal{O}_n$ agit sur $(\{1, n\})$ selon 1-iii

ii) On suppose que $y = g \cdot x$, Mq $\text{Stab}(y) = g \cdot \text{Stab}(x) \cdot g^{-1}$

iii) Mq la relation $x R y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tq } x = g \cdot y$ définit une relation d'équivalence sur E

preciser n classes d'équivalence

on pose $X/G = \{ \bar{x} \text{ tq } x \in E \}$

iv) Mq ds le cas particulier $G/\text{Stab}(x) : g R h \Leftrightarrow g \cdot h^{-1} \in \text{Stab}(x)$

v) Mq l'app $f : G/\text{Stab}(x) \rightarrow \mathcal{O}(x)$ est bien défini
 $\bar{g} \mapsto g \cdot x$ et bijective

vi) En deduire que si G est fini alors $\text{Card}(G) = \text{Card}(\mathcal{O}(x)) \cdot \text{Card}(\text{Stab}(x)) \quad \forall x \in E$

ii) Redémontrer autrement le thm de Lagrange

(4)

FIN