RÉSEAU IBNGHAZI CPGE

MP* 1 (Rabat)
Groupe 2

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Feuille d'exercices
Intégrales à un paramètre

Exo 1

On pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$ et $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{t^2+1}\,dt$.

1) Montrer que f et g sont définies et de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

2) Montrer que f et g sont solutions de l'équation : $y"+y=\dfrac{1}{x}$.

3) Étudier les limites de f et g en $+\infty$.

4) Trouver une relation entre f et g.

Exo 2

On pose $H(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{ixt}dt$

1) Montrer que la fonctions H est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que H est une solution de l'équation différentielle :
$$(E)\quad (x+i)y'+\frac{1}{2}y=0.$$

3) On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\Phi(x)=\left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2+\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}dt.$

Montrer que Φ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, préciser la valeur de cette constante.

En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$, puis celle de $H(0)$.

4) Résoudre l'équation (E) et donner l'expression de $H(x)$.

Exo 3

On pose $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n n}{n^2+x^2}$ et $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$.

1) Etudier l'ensemble de définition de f. Calculer $f(0)$.

2) Montrer que f est C^∞. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos(bt)\,dt$.

3) En déduire que $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos xt}{1+e^t}\,dt$.

4) Développer f en $+\infty$ sous la forme : $f(x)=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^4}+o(\dfrac{1}{x^4})$.

Exo 4

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty}f=1$ et $f(0)=1$.

On pose $\phi(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\left(\frac{\sin xt}{t}\right)^2dt$ et $H(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt.$

1) Quel est le domaine de définition de ϕ ? Exprimer la limite L en 0^+ de $\dfrac{\phi(x)}{x}$ à l'aide d'une intégrale.

2) Prouver que l'on a $L=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt.$

3) Domaine de définition, continuité et dérivabilité de H.

4) Calculer H' puis expliciter H.

Exo 5

On pose pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$

1) Montrer rapidement que : $\forall u \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+u) \leq u$.

2) Montrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$.

3) En déduire que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)..(x+n)}$.

4) On pose pour $n \geq 1$, $f_n(x) = \ln\left(\frac{n^x n!}{x(x+1)..(x+n)}\right)$

Montrer en utilisant la série de fonctions $\sum f_n - f_{n-1}$ que :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}.$$

Où γ désigne la constante d'Euler.

5) **Formule de Stirling :** Montrer que $\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$ pour x réel tendant vers $+\infty$.

Indication: $\ln\Gamma$ est convexe, encadrer $\ln\Gamma(x)$ par les cordes passant par $(\lfloor x\rfloor, \ln\Gamma(\lfloor x\rfloor))$.

6) Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et comparer.

Exo 6

Fonction définie par une intégrale.

1) On pose pour $x \geq 0$: $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt$.

Calculer explicitement $f'(x)$ et en déduire $f(x)$ (on calculera $f(0)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$).

2) On pose $I(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)\,dt$. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer $I'(x)$ puis en déduire $I(x)$.

3) Soit $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1}\,dx$.

a) Justifier l'existence de $I(\alpha)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que : $I(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{b+n^2}$.

Indication: $a = \alpha$, $b = \alpha^2$.

c) Donner un équivalent de $I(\alpha)$ quand $\alpha \longrightarrow \infty$.

Indication: comparaison série-intégrale.

Exo 7

Intégrale de Gauss

On considère les fonctions définies par :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 \quad \text{et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

1) Montrer que f et g sont dérivables et calculer f' et g'.

2) Montrer que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

3) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4) En déduire l'existence et la valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-(t^2+a^2/t^2)}\,dt$. **Indication:** $u = \frac{a}{t}$.

5) Soit $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\,\d{t}$. Prouver que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

6) Chercher une relation simple entre I et I'.

Indication: $I'(x) = -2xI(x)$.

7) En déduire la valeur de $I(x)$

Exo 8

Considérons $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}e^{ixt}}{\sqrt{t}}dt$.

1) Vérifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa drive.

2) En déduire une autre expression de f.

Exo 9

Posons $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\, t)^x dt$.

1) Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?

2) Montrer que f est une fonction continue sur $\mathcal{D}_f$.

3) Établir une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$, puis montrer que $xf(x)f(x+1)$ est une fonction constante.

4) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exo 10

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)}dt$.

1) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2) Étudier la régularité de f.

3) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.