

TD Polynômes
G2

Thème 1: Polynômes de Lagrange

1) Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ des réels deux à deux ts $a_i \neq a_j \quad \forall i \neq j$

Rappeler les propriétés que vous connaissez à propos des polynômes de Lagrange associés aux réels $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$

2) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une app qlq
mq $\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}(x)$ tq $f(a_i) = P(a_i) \quad \forall 1 \leq i \leq n$
on dit que P interpole f aux pts a_i

3) Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ des réels qlq
mq $\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}(x)$ tq $P(a_i) = \lambda_i$

4) Soit $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ tq $a_i \neq a_j$
on pose $D_n(\mathbb{R}) = \{ \text{matrice diagonale} \}$
 $C(D) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tq } MD = DM \}$
commutant de D

$K(D) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \exists P \in \mathbb{R}[x] \text{ tq } M = P(D) \}$
algèbre sous engendrée par D

①

i) Mq $D_n(\mathbb{R})$ s. algèbre de $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, x)$
rappeler sa base et sa dimension

ii) Mq $C(D)$ s. algèbre de $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, x)$

iii) Mq $K(D)$ s. algèbre de $(C(D), +, \cdot, x)$

iv) Mq $K(D)$ s. algèbre de $(D_n(\mathbb{R}), +, \cdot, x)$

Ainsi $[K(D) \subset D_n(\mathbb{R}) \text{ et } K(D) \subset C(D)]$

5) On pose toujours $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ tq $a_i \neq a_j$

x) Mq $[D_n(\mathbb{R}) \subset K(D)]$
indic : on pourra utiliser qdt 3

ii) Mq $(I_n, D, \dots, D^{n-1})$ est libre dans $D_n(\mathbb{R})$
indic : On pourra faire appel à la matrice
de Van Der Monde

iii) En deduire que $[D_n(\mathbb{R}) = K(D) = \text{Vect}(I_n, D, \dots, D^{n-1})]$

iv) Mq $C(D) \subset D_n(\mathbb{R})$
puis conclure

(2)

Thème 2: Polynômes de Tchebechev

- 1) Rappeler les propriétés que vous connaissez à propos des polynômes de Tchebechev $T_n(x)$
- 2) En déduire que $T_n(x)$ est d'ordre n et a n racines simples dans $[-1, 1]$
puis donner sa décomposition en facteurs irréductibles.
- 3) Soit $f, g: I = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fct continues
on pose $\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$
mq cette expression est bien définie
et vérifie les axiomes $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$ sur I
 $\|\lambda f\|_\infty = \lambda \|f\|_\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
 $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$
que représente géométriquement $\|f - g\|_\infty$
- 4) mq $\|T_n\|_\infty = 1$
- 5) On pose $a_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ les racines de $T_n(x)$ dans $[-1, 1]$
- 6) Que représente T_n pour la fct nulle vis à vis des a_k

6) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $\|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$ et $cd(P) = 1$

i) Calculer $T_n(\cos \frac{k\pi}{n})$ pour tout $0 \leq k \leq n$

ii) En deduire que $\frac{T_n}{2^{n-1}} - P$ change de
signe dans chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$
où $0 \leq k \leq n-1$

iii) Que peut-on conclure à propos de $\frac{T_n}{2^{n-1}} - P$

iv) En deduire que $\frac{T_n}{2^{n-1}} = P$

v) En deduire une contradiction, puis
conclure

7) Interpréter le résultat de la question 6
en terme d'interpolation de la fonction

(4)

Fin
SA