

Td Reduction
G2

$n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$

Et Matrice Compagnon
Endomorphisme Cyclique

E/K - ev de dim fini

$\dim E = n$ et $u \in L(E)$

Matrice Compagnon : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(K)$

Endomorphisme Cyclique : $u \in L(E)$ tq $\exists x_0 \in E$
tq $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$
soit une base de E

- 1) Mg u est cyclique si $\exists \beta$ base de E tq $M_\beta(u)$ compagnon
- 2) Mg tout endom nilpotent d'indice n est cyclique
- 3) Soit $u \in L(E)$ tq $\chi_u(x)$ est scindé à racine simple
on pose $\text{sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ tq $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$
et $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ tq $u(e_i) = \lambda_i e_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$
 - i) Mg β base de E
 - ii) on pose $x_0 = e_1 + \dots + e_n$, Mg $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ base de E
indice : penser à Van Der Monde
 - iii) Conclure
- 4) A l'aide d'un c. exple Mg la réciproque de 2 et 3 ne sont pas vraies.

5) On suppose u cyclique

i) $M_q \{ \text{id}_E, u, \dots, u^{n-1} \}$ est libre

ii) En deduire que $\deg \pi_u \geq n$

iii) En deduire que $\chi_u = \pi_u$

N.B La reciproque est vraie $\chi_u = \pi_u \Rightarrow u$ cyclique
(Centrale 2019)

iv) En deduire aussi $K(u) = \text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$

6) On suppose u cyclique et on pose $M(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$

on note $\beta = (e_1, \dots, e_n)$

i) $M_q \chi_u(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0$

Indic : $L_1 \leftarrow L_1 + xL_2 + \dots + x^{n-1}L_{n-1}$

ii) Donner $u(e_j)$ pour $1 \leq j \leq n-1$
 $u(e_n)$

iii) Verifier que ~~$\chi_u(u)(e_1) = 0$~~ ~~puisque~~ $\chi_u(u)(e_1) = 0$

iv) Verifier que $\forall 1 \leq j \leq n$, $e_j = u^{j-1}(e_1)$, $2 \leq j \leq n$

v) En deduire que $\chi_u(u)(e_j) = 0 \quad \forall 2 \leq j \leq n$

vi) Conclure que $\chi_u(u) = 0$

vii) Qu'a-t-on démontré ici?

Fin