

Td Polynômes
G3

Exo1: On pose $P(x) = (x+1)^n - 1$

1) Rappeler la def et propriétés de racine n^{e} de l'unité dans $\mathbb{C}$

2) En déduire les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{C}$

Indic: On pourra utiliser la formule

$$e^{i\theta} = 1 = 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$$

(double moitié)

3) En déduire que $P(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - z_k)$

$$\text{ou } z_k = 2i \sin \frac{k\pi}{n} e^{\frac{ik\pi}{n}} \quad 0 \leq k \leq n-1$$

4) Que vaut z_0

5) En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} z_k = (-1)^{n-1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x}$

6) Mg $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x} = n$

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = i^{n-1}$$

7) Vérifier que

8) En déduire que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\sin k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

(1)

Exo 2

P scindé $\Rightarrow P'$ scindé

1) Dire pourquoi la question ouverte est triviale dans $\mathbb{C}(x)$

2) On suppose ici $P(x) \in \mathbb{R}(x)$ scindé à racines simples

on pose $\deg P = n$ et $a_1, \dots, a_n$ ses racines

i) Rappeler le thm de Rolle

ii) En appliquant le thm de Rolle sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ tq $1 \leq i \leq n-1$

Mq $\exists \lambda_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tq $P'(\lambda_i) = 0$

iii) En deduire que $P'(x)$ est aussi scindé à racines simples

3) On suppose ici $P(x) \in \mathbb{R}(x)$ scindé

on pose $\deg P = n$, $a_1 < \dots < a_m$ les racines de P

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ leur mult respectifs

$$\text{et } Q(x) = \prod_{i=1}^m (x - a_i)^{\alpha_i - 1}$$

i) Dire pourquoi $(x - a_i)^{\alpha_i - 1}$ divise $P'(x)$ $\forall 1 \leq i \leq m$

ii) En deduire que $Q(x)$ divise $P'(x)$

iii) Mq $\exists \lambda_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tq $P'(\lambda_i) = 0$ $1 \leq i \leq m-1$

iv) En deduire que $B(x) = \prod_{i=1}^{m-1} (x - \lambda_i)$ divise $P'(x)$

v) En deduire que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $P'(x) = \lambda B(x) Q(x)$

vi) Dire pourquoi $\lambda = n \cdot \text{ct}(P)$

vii) Conclure que $P'(x)$ est aussi scindé dans $\mathbb{R}(x)$

(2)

FIN