Polynômes annulateurs

Partie A : Les Must To Know

Exercice 1 : Le polynôme caractéristique

1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Établir $\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \iff \mathrm{Sp}\, A \cap \mathrm{Sp}\, B = \emptyset$.

2) Soit V et W deux sous-espaces vectoriels de E stables par u et tels que $E = V \oplus W$. On note χ' et χ'' les polynômes caractéristiques des endomorphismes induits par u sur V et W.

   Montrer $\chi = \chi'\chi''$.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible de polynôme caractéristique χ_A. Établir que pour tout $x \neq 0$,

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{x^n}{\chi_A(0)}\chi_A(1/x).$$

   Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On désire établir l'égalité des polynômes caractéristiques $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

   (a) Établir l'égalité quand $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

   (b) Pour $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, justifier que pour $p \in \mathbb{N}$ assez grand $A + \frac{1}{p}\mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   En déduire que l'égalité est encore vraie pour A non inversible.

4) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. En multipliant à droite et à gauche la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$$

   par des matrices triangulaires par blocs bien choisies, établir $\lambda^p \chi_{AB}(\lambda) = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda)$.

5) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Établir $\chi_{(AB)^p} = \chi_{(BA)^p}$.

6) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $P_A(x) = \det(x\mathrm{I}_n - A)$ On suppose que x n'est pas valeur propre de A, montrer

$$\mathrm{tr}(x\mathrm{I}_n - A)^{-1} = \frac{P_A'(x)}{P_A(x)}.$$

Exercice 2 : Le polynôme minimal

1) Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant un polynôme minimal Π_u et $P \in \mathbb{K}[X]$.

2) Montrer que $P(u)$ est inversible si, et seulement si, P et Π_u sont premiers entre eux.

   Observer qu'alors $P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

3) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
   On suppose qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G stables par u.

   Établir que $\Pi_u = \mathrm{ppcm}(\Pi_{u_F}, \Pi_{u_G})$ (en notant Π_v le polynôme minimal d'un endomorphisme v).

Partie B : Les Classiques

Exercice 1 : Matrice Compagnon

Pour $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ polynôme unitaire, on définit la *matrice compagne* de P :

$$\mathcal{C}(P) := \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix};$$

pour $n = 1$, noter que P s'écrit $X + a_0$ et $\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(X + a_0) = (-a_0)$.

Montrer que $\chi_{\mathcal{C}(P)} = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$

Exercice 2 : Démonstration du théorème de Cayley Hamilton

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On se fixe un v dans E , et on va montrer que $\chi_f(f)(v) = 0$. En faisant varier v dans E, on obtiendra ainsi $\chi_f(f) = 0$ comme voulu.

1) Discuter le cas $v = 0$

2) On suppose que $v \neq 0$, *i.e.* (v) libre, on considère $\mathrm{m} = \min\left\{k \geq 2 \,;\, \left(v, f(v), ..., f^k(v)\right) \text{ liée}\right\}$,

i) Justifier que k existe et que $f^{\mathrm{m}}(v)$ s'écrit sous la forme $f^{\mathrm{m}}(v) = a_0v + a_1f(v) + ... + a_{\mathrm{m}-1}f^{\mathrm{m}-1}(v)$.

ii) On complète ensuite la famille libre $\left(v, f(v), ..., f^{\mathrm{m}-1}(v)\right)$ en une base $\mathcal{B}$ de E

Justifier que $$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 & * \\ 1 & \ddots & & \vdots & * \\ & \ddots & 0 & a_{\mathrm{m}-2} & * \\ & & 1 & a_{\mathrm{m}-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P) & * \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

$\chi_f(f)(v) = 0,$

3) Conclure

Exercice 3 : Endomorphismes cycliques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k. Pour $u \in \mathrm{L}(E)$ et $P \in k[X]$ on notera parfois simplement Pu au lieu de $P(u)$. On considère le morphisme d'algèbres

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon k[X] & \to & \mathrm{L}(E) \\ P & \mapsto & Pu \end{array}$$

Étant donné en plus un $x \in E$ on peut considérer le morphisme de k-espaces vectoriels

$$\begin{array}{rcl} \varphi_x\colon k[X] & \to & E \\ P & \mapsto & Pu(x) \end{array}$$

On note μ resp. μ_x le générateur unitaire du noyau de φ, resp. φ_x. On note $k[u]$ resp. E_x l'image de φ, resp. de φ_x

Définition : u est *cyclique* ssi il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$.

1) Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\mu_x | \mu$.

2) Soit $\mu = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs irréductibles, et $E_i = \ker(P_i^{\alpha_i} u)$.

i) Justifier l'existence de $x_i \in E_i$ tel que $P_i^{\alpha_i - 1} u(x) \neq 0$

ii) Montrer alors que $\mu_{x_i} = P_i^{\alpha_i}$

iii) On pose $a = x_1 + \cdots + x_r$, montrer alors que $\mu_a = \mu$.

3) *Soit $a \in E$ tel que $\mu_a = \mu$*

i) Justifier que u^k est combinaison linéaire des u^i pour $i \leq k-1$.
et que E_a *est un sous-espace* stable par u

ii) On pose $k = \deg(\mu_a) = \deg(\mu)$

Montrer que $e_1 = a$, $e_2 = u(a)$,... $e_k = u^{k-1}(a)$ forment une base de E_a

iii) Complétons-la avec des vecteurs $e_{k+1}, \dots, e_n$ en une base de E et soit $\{e_i^*\}$ la base duale. Considérons le sous-espace

$$G = \bigcap_{i=0}^{k-1} \ker(e_k^* \circ u^i)$$

Montrer que G est u-stable et que $E_a \cap G = \{0\}$

iv) Montrer que la famille $\left(e_k^* \circ u^i\right)_{i \leq k-1.}$ est libre

v) En deduire que dim G=n-k

vi) Conclure alors que

E_a est un sous-espace u-stable pour lequel il existe un supplémentaire u-stable.

4) En déduire le résultat suivant

Soit $u \in \mathrm{L}(E)$, μ son polynôme minimal, χ son polynôme caractéristique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) *u est cyclique.*

(2) $\mu = \chi$.

(3) *l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u est égal à $k[u]$.*

Exercice 4: **Nombres algébriques**

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés des nombres algébriques. Un nombre réel x est dit *algébrique* s'il existe un polynôme non nul P à *coefficients rationnels* (*i.e.* $P \in \mathbf{Q}[X]$) tel que $P(x) = 0$. Un réel x qui n'est pas algébrique est dit *transcendant*.

1. Montrer que les nombres réels $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sont des nombres algébriques.

2. Soit x un nombre réel. Montrer que x est algébrique si et seulement s'il existe un entier positif $n \geqslant 1$ tel que la famille de nombres réels $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ est liée dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.

3. Pour tout réel x, on note $\mathbf{Q}[x] := \{R(x), R \in \mathbf{Q}[X]\}$ l'ensemble des valeurs que peut prendre un polynôme à coefficients rationnels lorsqu'on l'évalue en x. (Par définition, $\mathbf{Q}[x]$ est un sous-ensemble de $\mathbf{R}$.)

> **3.1** Montrer que $\mathbf{Q}[x]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel.
>
> **3.2** Montrer que si x est algébrique alors le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}[x]$ est de dimension finie.
>
> [**Indication:** Considérer la division euclidienne dans $\mathbf{Q}[x]$ par un polynôme P tel que $P(x) = 0$.]
>
> **3.3** Réciproquement, montrer que si $\mathbf{Q}[x]$ est de dimension finie alors le réel x est algébrique.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$ un nombre algébrique et soit $\Pi \in \mathbf{Q}[X]$ un polynôme de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que $\Pi(x) = 0$.

> **4.1** Montrer que le polynôme Π est irréductible, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de factorisation $\Pi = R \cdot S$ avec R et S des polynômes de $\mathbf{Q}[X]$ de degré $\geqslant 1$.
>
> **4.2** Soit $P \in \mathbf{Q}[X]$ un polynôme tel que $P(x) = 0$. En faisant la division euclidienne de P par Π, montrer que Π divise P.
>
> **4.3** Soit $P \in \mathbf{Q}[X]$ un polynôme tel que $P(x) \neq 0$. Montrer que les polynômes P et Π sont premiers entre eux. En déduire qu'il existe des polynômes A et B de $\mathbf{Q}[X]$ tels que
> $$A\Pi + BP = 1,$$
> puis que l'on a $\frac{1}{P(x)} \in \mathbf{Q}[x]$.
>
> **4.4** Montrer que $\mathbf{Q}[x]$ est un corps. Un tel corps est souvent qualifié de *corps de nombres*.

5. Soient x et y deux nombres algébriques non nuls. On se propose de montrer que $x+y$ et xy sont encore des nombres algébriques[1]. On pose pour cela $\mathbf{Q}[x, y] := \{R(x, y), R \in Q[X, Y]\}$.

> **5.1** Montrer qu'il existe des entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ tels que $\{1, x, x^2, \ldots, x^m\}$ engendre $\mathbf{Q}[x]$ et $\{1, y, y^2, \ldots, y^n\}$ engendre $\mathbf{Q}[y]$.
>
> **5.2** Montrer que la famille $\{x^i y^j\}_{0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant n}$ engendre $\mathbf{Q}[x, y]$.
>
> **5.3** En déduire que $\mathbf{Q}[x, y]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie.
>
> **5.4** Montrer que $\mathbf{Q}[x+y] \subset \mathbf{Q}[x, y]$ et $\mathbf{Q}[xy] \subset \mathbf{Q}[x, y]$ et conclure.

[1] Le lecteur est invité à se rendre compte que la méthode naïve qu'il a employée à la question 1 se généralise mal. Défi : trouver un polynôme annulant $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$.