

Préparation Oral CCINP
Extraits 2024

EX1

- 1) pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ diagonale
- 2) $X \hookrightarrow G(1/2)$, $Y \hookrightarrow G(1/2)$ indépendantes
quelle est la probabilité que $\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonale
- 3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X \hookrightarrow P(\lambda)$ tq $\lambda > 0$
 $\text{Tr}(A^X)$ admet-elle une espérance
Si oui la calculer

EX2/ $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$

- 1) Domaine de définition de f
- 2) Continuité sur $\mathcal{D}_f$
- 3) Dérivabilité sur $\mathcal{D}_f$
- 4) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$

EX3/ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
 $M \mapsto AM$

- 1) Montrer que $\phi_P(A) = P(\phi_A)$ $\forall P \in \mathbb{R}(x)$
- 2) En déduire que A diagonale $\Leftrightarrow \phi_A$ diagonale
- 3) Montrer que $\lambda \in \text{sp } A$ de mult $= m \Rightarrow \lambda \in \text{sp } \phi_A$ de mult $= nm$

(On suppose ici que A est diagonalisable)

Indications

EX1

① - classique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable $\Leftrightarrow M = \lambda I$ on $\chi_A(x)$ double
à racine simple

(C) $M = \lambda I \Leftrightarrow b=0 \text{ et } a=0 \Leftrightarrow M=0$

ou $\chi_A(x) = x^2 - ax + b^2$ et $\Delta = a^2 - 4b^2 > 0$ ou $|a| > 2|b|$

2) M diagonalisable $\Leftrightarrow X=Y=0$ ou $|X| > 2|Y| \Leftrightarrow X > 2Y$ $X^2 \text{ et } Y^2 > 0$

$$P(X > 2Y) = P\left(\sum_{i>2j} P(X=i, Y=j)\right)$$

~~prob~~
geom

$$= P \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=2j+1}^{+\infty} P(X=i) P(Y=j) \right) = \dots \text{calcul}$$

3) $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n P(X=n) \Rightarrow$ transfert $E(\text{Tr}(A^X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Tr}(A^n) P(X=n)$

A diagonalisable car $3 > 2$

$$A = P D P^{-1}$$

$$A^n = P D^n P^{-1} \Rightarrow \text{Tr}(A^n) = \text{Tr}(D^n)$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Tr}(D^n) = \lambda_1^n + \lambda_2^n$$

$$E(\text{Tr}(A^X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_1^n e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_2^n e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda_1} e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_2} e^{\lambda_2}$$

EX2

Applications du cours

2/3

Ex 3

1) calculer $\phi_A^2(M) = \phi_A \phi_A(M) = \dots = A^2 M$

$\phi_A^k(M) = ?$ conclure

2) A diagonalisable $\Leftrightarrow P = \Pi_A$ d'ordre à racine simple

$\Rightarrow \Pi(\phi_A) = 0 \Rightarrow \Pi_A$ poly ann de ϕ_A de racine simple

$\Leftrightarrow$ pareil

3) $\lambda \in \text{Sp } A \Rightarrow \exists X \neq 0$ tq $AX = \lambda X$

$\Rightarrow AX^t Y = \lambda^t X^t Y$

$\Rightarrow AM = \lambda M \quad \forall M = X^t Y$

Si $x_1 \dots x_m$ base propre de $E_\lambda(A)$

Alors $(x_i^t y_j)$ base propre de $E_\lambda(\phi_A)$

ou (x_j) base canonique de $\mathbb{R}^n$

(3/3)