

Préparation aux Oraux 2025

Extraits CCINP

Planche 1

Exercice 1

Exercice 72 de la banque.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}}$.
2. Par comparaison série-intégrale, montrer que $u_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2}$.
3. Trouver un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_{n+1} + u_n$. Nature de $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$?

Montrer que (v_n) converge vers une limite $\ell < 0$.

5. Nature de $\sum \frac{1}{u_n}$?

Planche 2

Exercice 1 *Exercice n° 27 de la Banque CCINP.*

Exercice 2

- 1) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- 2) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))^\perp$.
- 3) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Quelle est la distance de M à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

Planche 3

Exercice 1 Exercice n° 21 de la Banque CCINP.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire définie d'un espace probabilisé dans $\mathbb{N}^*$. On définit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = \min(X, n).$$

On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

1. a) Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X \geq k) = q^{k-1}$.

b) En déduire la loi de Y_n .

c) Montrer que Y_n admet une espérance qui est $E(Y_n) = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

d) Calculer la fonction génératrice de Y_n

2. Montrer que :

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, P(X > k + n \mid X > k) = P(X > n) \Leftrightarrow X \text{ suit une loi géométrique.}$$

Planche 4

Exercice 1 Exercice n° 15 de la Banque CCINP.

Exercice 2

1) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ et $T_n^+(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices triangulaires supérieures donc tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs) sont des sous-groupes de $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$.

2) Montrer que $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R}) = \{I_n\}$.

3) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ la base constituée des vecteurs colonnes de A .

Soit $\mathcal{B}_{GS} = (v_1, \dots, v_n)$ la base orthonormée obtenue à partir de $\mathcal{B}$ grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

A l'aide de ces bases, montrer qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ telles que : $A = OT$.

Indications

Planche 1 exo 2

$$1) u_{2n} = \sum_{p=1}^n -\sqrt{2p-1} + \sqrt{2p} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{2p} + \sqrt{2p-1}}$$

$$2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \leq u_{2n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt$$

$$\frac{\sqrt{2n}}{2} \sim \left(\frac{\sqrt{2t}}{2} \right)_1^n \leq \left(\frac{\sqrt{2t-1}}{2} \right)_1^n \sim \frac{\sqrt{2n-1}}{2} \sim \frac{\sqrt{2n}}{2}$$

$$3) \text{CSSA} \Rightarrow u_{2n} \text{ et } u_{2n+1} \text{ adj} \rightarrow u$$

$$u_{2n+1} = u_{2n} - \sqrt{2n+1} = \frac{\sqrt{2n}}{2} + o(1) - \sqrt{2n+1}$$

$$\frac{u_{2n+1}}{\sqrt{2n}} \rightarrow -1/2 \Rightarrow u_{2n+1} \sim -\frac{\sqrt{2n}}{2} \sim -\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$$

donc $\boxed{u_n \sim \frac{\sqrt{n}}{2}}$

$$4) v_{n+1} - v_n = u_{n+2} - u_n = (-1)^{n+2} \sqrt{n+2} + (-1)^{n+1} \sqrt{n+1} \\ = (-1)^n (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\ = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ CSSA}$$

$\Rightarrow u_n \text{ diverge or } u_n < 0 \Rightarrow v_n \rightarrow l < 0$

$$5) \frac{1}{u_n} \sim \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sum \frac{1}{u_n} \text{ diverge}$$

Q

Planche 2

Ex 2

1) Casimir

$$\mathcal{L}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$$

$$A = \frac{A + {}^t A}{2} + \frac{A - {}^t A}{2} \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$2) \quad \langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^t A B) \quad \begin{array}{l} A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}) \\ B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

$$= \text{Tr}(AB)$$

$$= \text{Tr}(BA)$$

$$= -\text{Tr}({}^t BA) = -\langle B, A \rangle = -\langle A, B \rangle$$

$$\Rightarrow \langle A, B \rangle = 0$$

donc $\mathcal{L}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{L}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$
par égalité de dim

$$3) \quad \perp(M, \mathcal{L}_n(\mathbb{R})) = \perp(M, \underbrace{\mathcal{L}_n(\mathbb{R})}_{\mathcal{L}_n(\mathbb{R})})$$

$$= \perp(M, \frac{M + {}^t M}{2})$$

$$= \|M - \frac{M + {}^t M}{2}\| = \|\frac{M - {}^t M}{2}\|$$

$$= (\text{Tr}({}^t A \cdot A))^{1/2} \text{ où } A = \frac{M - {}^t M}{2}$$

Calcul...

(2)

Planche 3

Ex 2

$$\begin{aligned}
 1) \ a) \quad P(X \geq k) &= \sum_{i=k}^{+\infty} P(X=i) = \sum_{i=k}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} \\
 &= p(1-p)^{k-1} \sum_{i=k}^{+\infty} (1-p)^{i-k} = \frac{p}{1-p} (1-p)^{k-1} \frac{1}{1-(1-p)} = q^{k-1}
 \end{aligned}$$

$$b) \quad Y_n(n) = [1, n]$$

$$\begin{aligned}
 \forall k \in [1, n] \quad k \leq n \Rightarrow Y_n = k &\Leftrightarrow \min(X(1), \dots, X(n)) = k \\
 &\Leftrightarrow X \geq k \Leftrightarrow P(X \geq n) = q^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k < n \Rightarrow Y_n = k &\Leftrightarrow \min(X(1), \dots, X(n)) = k \\
 &\Leftrightarrow X = k \Leftrightarrow P(X=k) = p q^{k-1}
 \end{aligned}$$

en résumé

$$\begin{aligned}
 P(Y_n = k) &= p q^{k-1} \quad \text{or } k < n \\
 &q^{n-1} \quad \text{or } k = n
 \end{aligned}$$

Bien défini

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^{n-1} P(Y_n = k) + P(Y_n = n) \\
 &= p \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} + q^{n-1} \\
 &= p \frac{1-q^{n-1}}{1-q} + q^{n-1} = 1 \quad \text{car } p = 1-q
 \end{aligned}$$

c) Calcul
1) Calcul

$$2) \quad P(X > k+n | X > k) = P(X > n) \Leftrightarrow \frac{P(k < X < k+n)}{P(X > k)} = P(X > n)$$

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow \sum_{i=k+1}^{k+n-1} P(X=i) = \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X=i) \right) \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X=i)$$

Planche 4

1) Mq $A, B \in H \Rightarrow A \cdot B^{-1} \in H$

$B \in O(n) \Rightarrow B^{-1} = {}^t B \Rightarrow (B^{-1})^{-1} = ({}^t B)^{-1} = ({}^t B^{-1}) \Rightarrow B^{-1} \in O(n)$

$B \in T_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B} {}^t \text{com } B$ Mq $\text{com } B \in T_n^+(\mathbb{R})$
calcul

2) $A \in O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow$ ls colonne de A

$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ i \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ format BSA directe

calcul $\Rightarrow a_{ij} = 0$ si $i \neq j$
1 si $i = j$

3) $\Rightarrow \text{Vect}(\mu_1 \dots \mu_k) = \text{Vect}(v_1 \dots v_k) \quad \forall k$

$\Rightarrow \mu_1 = a_{11} v_1$

$\mu_2 = a_{12} v_1 + a_{22} v_2$

$\vdots$
 $\mu_n = a_{1n} v_1 + \dots + a_{nn} v_n$

$\Rightarrow A = (\mu_1 \dots \mu_n) = (a_{11} v_1, a_{12} v_1 + a_{22} v_2, \dots, a_{1n} v_1 + \dots + a_{nn} v_n)$

calcul $\Rightarrow (v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

(4)