

Préparation aux Oraux 2025

Extraits CCINP

Planche 1

Exercice 1 Exercice n° 77 de la Banque CCINP.

Exercice 2

1) Montrer que pour $n \geq 3$, on a :

$$\int_3^n \frac{\ln t}{t} dt + \frac{\ln 2}{2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} \leq \int_3^n \frac{\ln t}{t} dt + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}.$$

2) Montrer que

$$\ln^2 n - \ln^2(n-1) = \frac{2 \ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

3) On pose $u_n = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}(\ln^2(n) - \ln^2(n-1))$.

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{\ln^2 n}{2} + c + \varepsilon_n \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Planche 2

Exercice 1 Exercice n° 108 de la Banque CCINP.

Exercice 2

Soit $P = X^n - X + 1$, avec $n \geq 2$.

1) Montrer que P admet n racines $z_1, \dots, z_n$ distinctes sur $\mathbb{C}$.

2) Soit la matrice $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} = \begin{cases} 1 + z_i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $\det A$.

Planche 3

Exercice 1 Exercice n° 37 de la Banque CCINP.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$.

1. Montrer que : $\forall y, z \in E, \langle u(y), z \rangle = -\langle y, u(z) \rangle$.
2. Montrer que $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont supplémentaires orthogonaux.
3. a) $u|_{\text{Im } u}$ admet-il des valeurs propres?
b) Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ sans racine réelle.
- 4) En déduire que $\text{rg } u$ est pair.

Planche 4

Exercice 1 Exercice n° 34 de la Banque CCINP.

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Montrer que si u est nilpotent, alors $u^n = 0$.
- 2) Soit $n \geq 2$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & & (0) \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 3) Déterminer les matrices X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X^2 = A$.

Planche 5

Exercice 1 Exercice n°7 de la Banque CCINP.

Exercice 2

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$ et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer MM^T . En déduire $\det M$.
- 2) Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, donner le rang de M .
Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, donner le rang de M .
- 3) On considère $w \in \mathbb{C}$ tel que : $w^2 = b^2 + c^2 + d^2$. Quelles sont les valeurs propres de M ?
En déduire que si $w \neq 0$, alors M est diagonalisable.

Planche 6

Exercice 1 Exercice n° 63 de la Banque CCINP.

Exercice 2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.

$$\text{Soit } g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que g est continue sur I , puis dérivable sur I si $n \geq 2$.

2) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I \setminus \{0\}$ et que :

$$\forall x \in I \setminus \{0\}, g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} n! f^{(k)}(x)}{k! x^{n-k+1}}.$$

3) Montrer que :

$$\forall x \in I \setminus \{0\}, g^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) dt$$

grâce à la formule de Taylor avec reste intégral.

Planche 7

Exercice 1 Exercice n°4 de la Banque CCINP.

Exercice 2

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.

2. a) Montrer que $\dim(\ker A) = 2$.

b) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'équation $M^2 + M = A$, d'inconnue M , avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Si M est solution, montrer que M est diagonalisable.

b) Résoudre l'équation.

Indications

Planche 1
Ex 2

1) Comparaison $\Sigma - \int$

$$2) \ln^2 n - \ln^2(n-1) = (\ln n + \ln(n-1))(\ln n - \ln(n-1))$$

$$= \left(\ln n + \ln n + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \left(\ln n - \ln\left(n - \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$DL: \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

= ... Calcul

$$3) \frac{\ln k}{k} = u_k + \frac{1}{2}(\ln^2(k) - \ln^2(k-1))$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^n u_k + \frac{1}{2} \ln^2 n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n (\ln^2 k - \ln^2(k-1)) + \sum_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{k^2} + o\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln^2 n + S_n$$

or $\frac{\ln(k)}{k^2} + o\left(\frac{\ln k}{k^2}\right) \sim \frac{\ln k}{k^2}$ et $\sum \frac{\ln k}{k^2}$ converge
(Bertrand classic)

(1)

Planché 3

Ex 2

1) prendre $x = y + z$

2) $\forall u, y \in \text{Dom } u, \forall z \in \text{Ker } u$

$$\langle u(y), z \rangle = \langle z, u(y) \rangle = 0$$

donc $\text{Dom } u \perp \text{Ker } u$ car $\text{Dom } u \subset (\text{Ker } u)^\perp$

par égalité de dim $\Rightarrow$ égalité

3) a) $\lambda \in \text{Sp } u|_{\text{Dom } u} \Rightarrow \exists x \neq 0$ tq $u(x) = \lambda x$ et $x \in \text{Dom } u$
 $\Rightarrow \langle u(x), x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow u(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } u$$

$$\Rightarrow x \in \text{Dom } u \cap \text{Ker } u \Rightarrow x = 0$$

Abs

b) Cons sup $P(x) = \prod (ax^2 + bx + c)^{\alpha}$ tq $b^2 - 4ac < 0$

4) selon 3 a et 3 b $\chi_{u|_{\text{Dom } u}}(x) = \prod (ax^2 + bx + c)$

$$\dim \text{Dom } u = \deg \chi_{u|_{\text{Dom } u}} = \text{pair}$$

(Planche 4)

Ex 2:

1) ~~classic~~ classic: u nulp d'indice $p \Rightarrow p \leq n$
 et effet $u^p \neq 0$ et $u^{p-1} \neq 0$

$\Rightarrow \exists x \in E \text{ tel } \Rightarrow (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ libe
 $u^{p-1}(x) \neq 0 \Rightarrow p \leq n$ (Card libe $\leq \dim$)

2) $p \leq n \Rightarrow (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ libe et Card $\leq \dim$
 $\Rightarrow$ base

3) $X^2 = A \Rightarrow X^{2n} = 0$ et $X^{2n-2} \neq 0$
 $A^n = 0$ $A^{n-1} \neq 0$

$\Rightarrow X$ nulp d'indice $p = 2n-1$ ou $p = 2n$

$$2n-1 \leq n \Rightarrow n \leq 1$$

$$2n \leq n \Rightarrow n \leq 0$$

impossible car $n \geq 2$

(Planche 5) exo 2

1) calcul: $MM^T = \lambda I_4$ ou $\lambda = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$$\det(MM^T) = \lambda^4 \Rightarrow \det M^2 = \lambda^4 \Rightarrow \det M = \pm \lambda^2$$

2) $\lambda \neq 0 \Rightarrow M \text{ inv} \Rightarrow \text{rg } M = 4$

$\lambda = 0 \Rightarrow MM^T = 0 \Rightarrow \mathcal{D}_n(M^T) \subset \text{Ker } M$

$$\Rightarrow \text{rg}(M^T) \leq \dim \text{Ker } M$$

$$\Rightarrow \text{rg } M \leq 4 - \text{rg } M \Rightarrow \text{rg } M \leq 2$$

(3)

Planché 6

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = g(0) \Rightarrow g \text{ continue}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x f'(0)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} f''(0) x^2 + o(x^2)}{x^2} \quad \downarrow \text{Taylor}$$

$$= -\frac{1}{2} f''(0) \Rightarrow g \text{ dérivable}$$

2) récurrence

$$3) g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} \left(\sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R(x) \right) \quad \text{car } f(0)=0 \quad \text{or } R(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} dt$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0) x^{k-1}}{k!} + \frac{R(x)}{x}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0) x^{k-1}}{k!}}_{\text{deg} = n-1}$$

$$g^{(n)}(x) = \left(\frac{R(x)}{x} \right)^{(n)}$$

$$= \dots \quad \text{calcul par récurrence} \quad \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) dt$$

(4)

Planche 7

EX 2

1. a) $A^2 = 0 \Rightarrow \text{Im} A \subset \text{Ker} A$

$\Rightarrow \dim \text{Im} A \leq 3 - \dim \text{Im} A$

$\Rightarrow 3 - \dim \text{Ker} A \leq \dim \text{Ker} A$

$\Rightarrow \dim \text{Ker} A \geq 3/2$

$\Rightarrow \dim \text{Ker} A = 2 \text{ ou } 3$

$\dim \text{Ker} A = 3 \Rightarrow A = 0$ impossible

b) $\dim \text{Ker} A = 2$ on prend (e_2, e_3) base de $\text{Ker} A$
 $\dim \text{Im} A = 1$
 $e_2 \in \text{Ker} A$ on complète à A
 puis on pose $e_1 = u(e_2)$

Ma $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ libre facile et card = dim
 donc β base de E

3) $A^2 = 2A \Rightarrow (M^2 + M)^2 = 2M^2 + 2M$

$\Rightarrow M^4 + 2M^3 + M^2 = 2M^2 + 2M$

$\Rightarrow M^4 + 2M^3 - M^2 - 2M = 0$

$\Rightarrow X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X = X(X^3 + 2X^2 - X - 2) = 0$

$\Rightarrow X(X(X^2 - 1) + 2(X^2 - 1))$ poly ann

$\Rightarrow X(X^2 - 1)(X + 2)$ poly ann n'a pas de racine simple

4) $MA = AM$ et diagonalisable $\Rightarrow$ Simult diagonalisable

$M = PDP^{-1}$

$A = PDP^{-1}$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$M^2 + M = A \Rightarrow D^2 + D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1^2 + \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2^2 + \lambda_2 &= 2 \end{aligned}$

(5)

2