

Extraits CCINP

Planche 1

Exercice 1 *Exercice n° 5 de la Banque CCINP*

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que si w est une valeur propre complexe de A , alors $\bar{w}$ l'est aussi.
- Montrer que $X^3 - 3X - 4$ possède une unique racine réelle.
 - On suppose dans cette question de $A^3 - 3A - 4I_n = 0$.
Montrer que $\det A > 0$.
- On suppose dans cette question de $A^2 + A + I_n = 0$.
Montrer que n est pair.
- On suppose dans cette question de $A^3 + A^2 + A = 0$.
 - Montrer que $\text{rg } A$ est pair.
 - Montrer que $\text{tr } A \in \mathbb{Z}^-$.

Planche 2

Exercice 1 *Exercice n° 75 de la Banque CCINP*

Exercice 2

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Rappeler la définition de $\lim_{x \rightarrow 0} |f'(x)| = +\infty$.
Montrer que :

$$\forall A > 0, \forall x > 0, |f'(x)| \geq \int_0^A \frac{t^2}{1+t^2} (1 - xt^2) dt.$$
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$.

Planche 3

Exercice 1 :

Banque n°13

Exercice 2 :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

- Montrer que $M = CL$ où C une matrice colonne non nulle et L une matrice ligne non nulle.
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg}(AB - BA) = 1$. Calculer $(AB - BA)^2$.

Indications

Planché 1

Q2

$$1) \overline{AX} = \overline{WX} \Rightarrow \overline{AX} = \overline{WX} \Rightarrow \overline{AX} = \overline{WX} \Rightarrow A\overline{X} = \overline{W}X$$

$$2) 1) \text{TVI: } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{ et } \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \text{ dresser le TV} \quad \begin{matrix} \text{car } A \in M_n(\mathbb{C}) \\ \Rightarrow \overline{W} \in \text{Sp}(A) \end{matrix}$$

$$6) A^3 - 3A - 4I = 0 \Rightarrow \pi_A \text{ divise } X^3 - 3X - 4 = P(X)$$

admet une seule vp $\lambda \in \mathbb{R}$
 ——— autre vp $w \in \mathbb{C}$
 ——— autre $\overline{w} \in \mathbb{C}$

$$\det A = \lambda \cdot w \cdot \overline{w} = \lambda |w|^2 \geq 0$$

$$A^3 - 3A - 4I = 0 \Rightarrow A \left(\frac{A^2 - 3I}{4} \right) = I \Rightarrow A \text{ inversible} \Rightarrow \det A \neq 0$$

$$3) 1) A^2 + A + I = 0 \Rightarrow \pi_A \text{ divise } X^2 + X + 1$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(A) \subset \{ \delta, \overline{\delta} \}$$

$$\Rightarrow \chi_A(X) = (X - \delta)^2 / (X - \overline{\delta})^2$$

clavier δ et $\overline{\delta}$ ont m mult deg χ_A

$$\Rightarrow \dim E = \deg \chi_A = 2\alpha$$

$$b) \text{Tr } A = \sum \text{vap} = \alpha \delta + \alpha \overline{\delta} = \alpha (\delta + \overline{\delta}) = -\alpha \in \mathbb{R}$$

$$\delta = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

①

Planche 2

1) $t \mapsto f(t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ Cont morcan

$x \mapsto f(x, t)$ de classe C^1

$\varepsilon \mapsto f(x, t)$ Cont morcan

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| \leq \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2} \leq e^{-xt^2} \quad \text{et } \int_0^{+\infty} f(x, t) dt < \infty$$

2) $\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall |x| < \alpha \Rightarrow |f'(x)| > A$

$$|f'(x)| = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2} dt \geq \int_0^A \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2} dt \geq \int_0^A \frac{t^2}{1+t^2} (1-t^2) dt$$

car $e^u \geq 1+u$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2) = 1 \Rightarrow \forall \varepsilon = \frac{1}{2}, \exists \alpha > 0, \forall |x| < \alpha \Rightarrow |1-x^2 - 1| < \varepsilon$

$\Rightarrow 1 - \varepsilon > 1 - x^2$

dnc $|f'(x)| \geq \frac{1}{2} \int_0^A \frac{t^2}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^A \frac{t^2(1-t^2)}{1+t^2} dt$

$= \frac{1}{2} (A - \arctan A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty$

②

planche 3

Ex 2
1) classique

$\text{rg} A = 1 \Rightarrow$ tous les colonnes de A sont proportionnelles à une colonne C

$$C_1 = \alpha_1 C, \dots, C_n = \alpha_n C$$

$$\text{posons } C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

$$\text{dnc } M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ C_1 \alpha_1 & \dots & C_1 \alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n \alpha_1 & \dots & C_n \alpha_n \end{pmatrix} = CL$$

$$\text{on } L = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$$

$$2) \text{rg}(AB - BA) = 1 \Rightarrow AB - BA = CL$$

$$\Rightarrow (AB - BA)^2 = C \underbrace{(L C)}_{\downarrow} L$$

$$(\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \lambda$$

$$\text{on } \lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 C_i$$

$$= \lambda CL$$

$$= \text{Tr}(M)$$

$$\text{ici } M = AB - BA$$

$$= \text{Tr}(AB - BA)$$

$$= \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0$$

(3)