Préparation aux Oraux : Session 2026

Extraits CCINP

Planche 1

Énoncé exercice 64 **8 points**

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

12 points

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K}).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d, e, f) pour que A soit diagonalisable.

Dans l'hypothèse où A est diagonalisable, diagonaliser A.

Planche 2

Énoncé exercice 2 **8 points**

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$).
   Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.
   On pose, pour tout $x \in\,]-R, R[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

12 points

Un homme peint un mur en étant placé sur un échafaudage, des passants passent sous son échafaudage et ont chacun une probabilité $p \in]0,1[$ de se faire toucher par une goutte de peinture. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes touchées en une journée et Y celui du nombre de personnes qui ne sont pas touchées. On suppose que n personnes passent dans la journée.

1. Donner les lois de X et Y, puis définir si X et Y sont indépendantes.
2. On suppose maintenant que N personnes passent dans la journées et que N suit une *loi de Poisson* de paramètre $\lambda > 0$.
   Donner les lois de X et de Y, puis l'espérance et la variance de X.
3. Montrer que X et Y sont indépendantes.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X, N)$. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

Planche 3

Énoncé exercice 63 **8 points**

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
   Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   ii. $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
   iii. $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

12 points

On pose $d_0 = 1$, $d_1 = \frac{1}{2}$ et

$$\forall n \geqslant 2, d_n = \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \sqrt{\frac{1}{n+1}} & & & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{n+1}} & \ddots & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & \ddots & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & & & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer d_2, d_3.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 2, (n+1)d_n = nd_{n-1} + d_{n-2}$.
3. En déduire une information sur le rayon de convergence de $\sum d_n x^{n+1}$.
4. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^{n+1}$. On admet (pour l'oral, sinon démontrer que) f vérifie l'équation :

$$(E) : (1-x)f'(x) - xf(x) = 1$$

Montrer que $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{1-x}$. En déduire une expression de d_n en fonction de n.

Planche 4

Énoncé exercice 109 **8 points**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

12 points

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$.
On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. et on suppose que $\sum a_n$ converge.
Montrer que : $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = R_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k (x^{k+1} - x^k)$. [*On pourra exprimer a_k en fonction de (R_k)*]

3. En déduire que $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Planche 5

Énoncé exercice 7 **8 points**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .
   (a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   (b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive.
   Prouver que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

   Remarque 1 : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

12 points

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$? Dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$?
3. Trouver une matrice triangulaire T semblable à A.
4. Quelle est la limite de $\frac{A^n}{n!}$ quand $n \longrightarrow +\infty$?

Planche 6

Énoncé exercice 112 **8 points**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

12 points

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit U_n la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) Sans calculer de déterminant, trouver les valeurs propres de U_n avec leur multiplicité.

2) Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n$.
On définit $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $f_i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{i-1} e_k - e_i$.
Montrer que $(f_i)_{2\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthogonale de sous-espaces propres associés à 0 de U_n pour le produit scalaire canonique.

3) En déduire une base orthonormée de U_n.
Donner la formule de diagonalisation de U_n.