

Préparation Oual Centrale
Extrait 2024

Ex 1 $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$

- $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$
- 1) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite
 - 2) Montrer que $I_{n+1} = (1 - \frac{1}{3n}) I_n$
 - 3) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\ln(I_n) = \alpha \ln n + \beta + o(1)$
 - 4) Étudier la convergence de $\sum I_n$

Ex 2

1) Montrer que $x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ ou $o(x^4) = x^4 \varepsilon(x)$ tel que $\varepsilon(x) \rightarrow 0$

$\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = -\frac{1}{24}$

2) Montrer que $\frac{1}{n^8} \sum_{k=1}^n k^4 \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Indications

Ex 1

- 1) Comparaison $\sum -$
- 2) $I_{n+1} - I_n = \dots$
- 3) Mg (3) $(\Rightarrow) \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $w_n = \ln(I_n/n^\alpha)$ wgl
- 4) Étudier la convergence de $\sum (w_{n+1} - w_n)$
- 5) Vérifier que $\alpha = 1/3$ conclure

Ex 2

$$u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $u_n = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$