Préparation aux Oraux 2025

Extraits Centrales Supélec

Planche 1

Math 2 (Python)

On définit $a_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}(-1)^k a_k\right]$$

Et, partout où c'est bien défini,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}x^n$$

1. Ecrire un programme donnant a_n pour tout $n \in \mathbf{N}$. Afficher $2^n a_n$ pour $0 \leq n \leq 10$, émettre une conjecture sur la formule de a_n.
2. Tracer sur $[-1,1]$ les fonctions $2f'$ et $x \mapsto e^x f(-x)$ (ce dernier point à vérifier).
3. En déduire que f est définie sur $\mathbf{R}$ et la calculer.

Math 1

1. Soit D et D' deux droites de $\mathbf{R}^3$. On note $G(D)$ (resp. $G(D')$) l'ensemble des rotations d'axe D (resp. D'). Montrer que ce sont des sous-groupes de $SO_3(\mathbf{R})$.

2. Soit S la sphère unité de $\mathbf{R}^3$, et soit $d \in]0,1[$. On définit sur S la relation $\mathcal{R}$ par $A\mathcal{R}B$ si et seulement si il existe $n \in \mathbf{N}$ et $(M_k)_{0 \leq k \leq n}$ suite finie de points de S tels que $M_0 = A$, $M_n = B$ et, pour tout k, $M_k M_{k+1} = d$.
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Montrer que $\mathcal{R}$ ne possède qu'une seule classe d'équivalence : S tout entière. On pourra montrer qu'il existe $0 < \epsilon < 2$ tel que pour tout $(A,B) \in S^2$ tels que $AB < \epsilon$ on a $A\mathcal{R}B$. Pour cela, on pourra considérer les points P et Q définis par $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\|}$ et $\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OP}$

Planche 1

Math 2 (Python)

Soit

$$M = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $u \in L(\mathbf{R}^4)$ canoniquement associé à M.

1. Si $x \in \{e_1, \ldots, e_4\}$, conjecturer la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) \right)$$

2. (a) Montrer que $P_M = (X^2 + aX + b)^2$ avec a et b des réels à calculer. En déduire un polynôme annulateur de M de degré 2.

   (b) Trouver un plan vectoriel F stable par u. Donner la matrice de $u|_F$ dans une base orthonormale de F.

   (c) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} M_1 & (0) \\ (0) & M_2 \end{pmatrix}$$

Math 1

On considère
l'expérience suivante. On tire successivement et alétoirement un entier naturel entre 1 et N. Tant que celui-ci est supérieur ou égal au précédent, on continue. Si l'entier naturel tiré est strictement inférieur au précédent, on s'arrête. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tours nécessaires pour terminer le jeu.
Par exemple, si la suite suivante est tirée avec $N = 12$: $2, 5, 8, 9, 9, 7$, on s'arrête au tour 6 et $X = 6$.

1. Préliminaire de dénbrement.

   (a) Soit $(n, k) \in \left(\mathbb{N}^\star\right)^2$. Déterminer le nombre de $k-$uplets de $[\![1, n]\!]$ $(x_1, ..., x_k)$ tels que $1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leq n$.

   (b) On note Γ_k^n le nombre de $k-$uplets tels que $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k \leq n$. Montrer que

$$\Gamma_k^n = \binom{n+k-1}{k}$$

2. (a) Déterminer la probabilité pour que le jeu ne se termine jamais.

   (b) Calculer la loi de X.

3. Une dernière question de fonctions génératrices dont je ne me rappelle plus...

Corrigé

Planche 1

Math 2

commentaires (e.g.)

J'ai passé toute ma préparation sur l'informatique. Le programme marchait, le correcteur lui a accordé une minute d'attention puis il m'a fait passer aux maths. Correcteur plutôt sympathique, ne parlait pas beaucoup mais acquiesçait quand je partais sur les bonnes pistes.

Le programme :

```
def a(n):
    a0=1
    L=[]
    L.append(a0)
    b=0
    for k in range(n):
        for j in range(k):
            b=b+binom(k,j)
        b=b*(-0,5)
        L.append(b)
    a=L[len(L)-1]
    return a
```

La conjecture : $\forall n \in \mathbf{N}\ a_n = \dfrac{1}{2^n}(1-2n)$. Initialisation : vrai pour a_0. On suppose ensuite la formule pour $j \in [\![0, n]\!]$. On a alors

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1-2k}{2^k}\right] \qquad = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left(\frac{-1}{2}\right)^k(k-\frac{1}{2})\right]$$

On pose $g\ :\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left(\frac{-1}{2}\right)^k x^{k-\frac{1}{2}}\right]$. Alors $g'(1) = a_{n+1}$. Or g se calcule facilement avec la formule du binôme.

On trouve finalement $f(x) = e^{x/2}(1-x)$, de mémoire.

Math 1

commentaires(h.g.)

On se place sur le cercle $C = S \cap \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est le plan médian de $[AB]$. On définit sur C : $\phi \; : \; H \mapsto AH$. On prend ϵ assez petit, pour avoir le fait que si A est assez proche de P, $AP < d < AQ$. Or ϕ est continue, on a donc un N dans C tel que $AN = d = NB$. On fera bien sûr des dessins, pas trop négligés.

commentaires(h.g.)

Encore un examinateur banal (sympathique et silencieux), mais ne s'est rendu compte qu'en catastrophe que l'oral était terminé, seulement après l'heure prévue. . .5 minutes supplémentaires fortuites, donc. Côté rédaction, c'était très souple (le dessin suffisait souvent), ce qui facilite beaucoup un tel exercice de géométrie, d'ailleurs moins original et un peu plus facile si on a choisi l'option informatique.

commentaires(b.a.)

Evidemment, un problème de temps, même s'il peut a priori être considéré comme une infraction au principe d'égalité de traitement entre les candidats, est beaucoup moins grave qu'à l'écrit, surtout si l'interrogateur s'en est rendu compte.

Planche 1

Math 2 (Python)

commentaires(r.c.)

Je n'ai pas pensé à utiliser Python pour la conjecture, d'pù une perte de temps. Et je me suis trompé dans le calcul du polynôme caractéristique. Donc je n'avais pas grand chose en arrivant au tableau. L'examinateur a dû bien aider au début.

---

commentaires(b.a.)

On constate deux choses : une structure par blocs assez manifeste, avec deux blocs antidiagonaux opposés, qui me fait penser en dimension 4 à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

en dimension 2, que je décomposerais volontiers en I_2+A avec A antisymétrique. On pourrait s'en inspirer ici. Et la présence du $\sqrt{3}$, qui fait penser à ce qu'on met devant une matrice pour la rendre orthogonale. Et effectivement, on divise par la norme des vecteurs colonnes, on les rend ainsi unitaires (on parle bien entendu de la norme euclidienne). Et effectivement, les colonnes sont deux à deux orthogonales, u est donc une isométrie vectorielle. Si limite il y a, elle est invariante par u ; en effet, notant

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) \ ,$$

on a

$$u(x_n) - x_n = \frac{1}{n}(u^n(x) - x)$$

or u conserve la norme, donc

$$\|u(x_n) - x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Il est donc judicieux de calculer les vecteurs invariants par u, i.e. résoudre $MX = X$. Je trouve $MX = X \Leftrightarrow X = (0)$, donc la limite devrait être nulle. . .si elle existe. Après tout, il ne s'agit que de conjecturer.

On trouve (calcul direct par développement par rapport à la première ligne par exemple, ça ne se passe pas si mal)

$$P_{\sqrt{3}M} = \left((X-1)^2 + 2\right)^2$$

ce qui confirme d'ailleurs que 1 n'est pas valeur propre. On en déduit sans difficulté

$$P_M = (X^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}X + 1)^2$$

(sauf erreur ! là aussi, on pouvait peut-être calculer avec Python). On trouve alors que $X^2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}X + 1$ est annulateur. Et donc, pour n'importe quel x dans $\mathbf{R}^4$, $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u. Comme u est une isométrie vectorielle, si F est stable par u, $F^\perp$ aussi. . .

Math 1

commentaires(a.p.t.)

25 minutes de passage. Examinateur doté d'un accent, parfois difficile à suivre et à comprendre. Il était surtout très peu intéressé (pour ne pas dire qu'il s'en moquait totalement...) par ce que je faisais : il est par exemple sorti de la salle sans raison apparente durant 3 minutes et a passé le reste du temps sur son téléphone. Son tutoiement a achevé de me déstabiliser. Un grand moment de solitude.

commentaires(b.a.)

Il y a bijection entre l'ensemble des k-uplets qie l'on cherche à dénombrer et l'ensemble de leurs « supports » : l'application

$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto \{x_1, \ldots, x_k\}$$

est bijective de l'ensemble cherché sur l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$. Donc le nombre cherché est

$$\binom{n}{k}$$

Dénombrement à astuce pour la question suivante. Pour rendre le k-uplet strictement croissant, on ajoute 1 à x_2, 2 à x_3, etc. . .on crée ainsi une application

$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (x_1, 1 + x_2, \ldots, (k-1) + x_k)$$

de l'ensemble des k-uplets croissants d'éléments de $[\![1, n]\!]$ dans l'ensemble des k-uplets strictement croissants d'éléments de $[\![1, n+k-1]\!]$. Est-ce bijectif ? oui, on peut exhiber assez facilement la bijection réciproque.
Le jeu ne se termine jamais si et seulement si les tirages « stationnent », c'est-à-dire si et seulement si il existe un rang k et un $m \in [\![1, N]\!]$ tels que

$$\forall n \geq k \qquad Y_n = m$$

(on note Y_n le n-ème tirage ; les tirages sont indépendants). Or

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{k+p} (Y_n = m)\right) = \left(\frac{1}{N}\right)^{p+1} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

(on suppose $N > 1$ bien sûr), donc par continuité décroissante, on a

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{k+p} (Y_n = m)\right) = 0$$

Et donc, une réunion dénombrable d'évènements négligeables étant négligeable, la probabilité pour que la suite de tirages stationne à m est nulle. Et une réunion finie d'événements négligeables étant négligeable, la probabilité pour que la suite des tirages stationne est nulle. Donc la probabilité pour que le jeu ne se termine jamais est nulle. L'évènement $(X = n)$ est l'évènement résumé par $Y_1 \leq \ldots \leq Y_n > Y_{n+1}$. On conditionne suivant les valeurs de Y_n en utilisant le résultat précédent ; supposant d'abord $n \geq 2$,

$$P(X = n) = \sum_{m=2}^{N} \binom{m+n-1}{n-1} \left(\frac{1}{N}\right)^n \frac{1}{m-1}$$

(la probabilité dans la somme étant la probabilité pour que $Y_1 \leq \ldots \leq Y_n = m$ et $Y_{n+1} < m$). Plus simplement,

$$P(X = 1) = \sum_{m=2}^{N} \frac{1}{N} \frac{1}{m-1}$$

Je suppose qu'ensuite on calcule la fonction génératrice de X...