Préparation aux Oraux 2025

Extraits Centrales Supélec

Planche 1

Math 2 (Python)

On définit la suite (Δ_n) par $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a_1 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a_1 & 1 & -1 \\ 0 & a_2 & 1 \end{vmatrix}$,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n & 1 \end{vmatrix}.$$

1. Soit $\ell = [a_1, \dots, a_n]$, écrire une fonction Python qui renvoie la matrice A_n pour $n \in \mathbf{N}_*$, puis une fonction qui renvoie Δ_n, puis une fonction qui renvoie le graphe contenant les Δ_n.
2. Tester la dernière fonction avec les suites $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ et (1).
3. Montrer que, pour $(a_n) = (1)$, la suite (Δ_n) diverge et trouver un équivalent.

Math 1

Soit $(A, +, \times, .)$ une $\mathbf{R}$-algèbre commutative, intègre, de dimension $n \geq 2$.

1. Soit $a \in A \setminus \{0_A\}$, $f : x \mapsto a \times x$. Montrer que f est linéaire, en déduire que a est inversible.
2. Montrer que tout $a \in A$ admet un polynôme annulateur non constant.
3. Montrer que $(\mathbf{C}, +, \times, .)$ est la seule $\mathbf{R}$-algèbre de dimension 2 à isomorphisme près. Questions intermédiaires : Montrer que toute famille $(1_A, a, a^2)$ est liée, montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $(1_A, a)$ soit libre, montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $a^2 = -1_A$.

Planche 2

Math 2 (Python)

On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questions

1. Tracer le polynôme caractéristique de A et justifier graphiquement qu'elle a 4 valeurs propres distinctes que l'on classe par ordre croissant : $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq |\lambda_4|$.
2. Justifier qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ (v_1, v_2, v_3, v_4) telle que $\forall i \in [\![1, 4]\!],\ Av_i = \lambda_i v_i$.
3. Soit w un vecteur non normal à v_1. On définit par récurrence la suite suivante : $w_0 = w$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,
$$w_{n+1} = \frac{1}{||Aw_n||} Aw_n$$
Justifier que (w_{2n}), (w_{2n+1}) convergent et déterminer la limite de (w_n). En déduire la limite de $(w_n|Aw_n)$ quand $n \to +\infty$.
4. On définit la matrice $A_1 = A - \lambda_1 v_1 v_1^T$. Justifier qu'elle est diagonalisable et exprimer ses valeurs propres en fonction des λ_i pour $i = 1, 2, 3, 4$.
5. En déduire une méthode numérique permettant de calculer les valeurs et vecteurs propres d'une matrice $n \times n$ symétrique.

Math 1

Si f est une fraction rationnelle qui n'a ni pôle ni racine de module r on pose

$$N_r(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})} re^{it} \mathrm{d}t$$

1. Soit $a \in \mathbf{C}$. On pose
$$F(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - a} \mathrm{d}t$$
Calculer $F(a)$ quand $|a| < 1$ et quand $|a| < 1$.
2. Montrer que $N_r(fg) = N_r(f) + N_r(g)$. En déduire que $N_r(f)$ est égal au nombre de racines de f de module $< r$ moins le nombre de pôles de f de module $< r$. Indication : commencer par les polynômes de degré 1.

Corrigé

Planche 2

Math 2 (Python)

Commentaire.
30 minutes de préparation avec Python, 30 minutes de passage. Un examinateur sympathique, intéressé, qui savait donner de bonnes indications lorsque nécessaire. Je me suis un peu embrouillé dans les indices entre les suites, les différents vecteurs, les sommes... mais l'on pouvait discuter calmement, il riait même parfois devant mes "Ahhh, mais oui !". Il m'a gentiment donné quelques informations culturelles sur cet exercice à la fin de l'oral.

Éléments de correction *Chose étrange, je ne sais pas pourquoi on ne s'est pas placé dans le cas général d'une matrice symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À part la première question, tout l'exercice se traite exactement de la même façon dans les deux cas...*

Question 1 Le programme informatique :

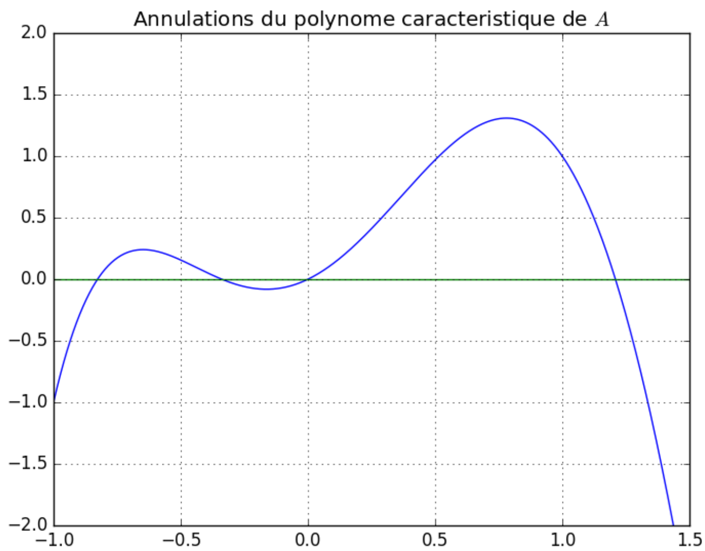
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def A():
    t=[[0,2],[2,0],[2,3],[3,2],[3,3]]
    A=np.ones((4,4))
    for k in range(len(t)):
        A[t[k][0],t[k][1]]=0
    return np.array(A)

def tracer_poly_A():
    les_x=np.linspace(-1,1.5, 1000)
    B=A()
    polynome = np.poly(B)
    def eval_poly(x):
        res=0
        for k in range(len(polynome)):
            res+=polynome[k]*x**(len(polynome)-k)
        return res
    les_y=[eval_poly(x) for x in les_x]
    plt.clf()
    plt.title('Annulations␣du␣polynome␣caracteristique␣de␣$A$')
    plt.grid()
    plt.axis([-1.,1.5,-2,2])
    plt.plot(les_x,les_y)
    plt.show()

tracer_poly_A()
```

Ce qui donne ce résultat :



Question 2 Mille milliards de mille sabords, cette matrice serait-elle symétrique réelle ?

Question 3 On peut commencer, classiquement, par calculer la différence entre deux termes consécutifs de (w_{2n}) : pour cela il nous faut exprimer $w_{2(n+1)}$ en fonction de w_{2n}.

$$\begin{aligned} w_{2(n+1)} &= \frac{1}{||Aw_{2n+1}||}Aw_{2n+1} \\ &= \frac{1}{||A\frac{1}{||Aw_{2n}||}Aw_{2n}||}\frac{1}{||Aw_{2n}||}A^2w_{2n} \\ &= \frac{1}{||A^2w_{2n}||}A^2w_{2n} \end{aligned}$$

Ce qui donne l'idée d'une récurrence, pour montrer $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$w_{2n} = \frac{1}{||A^{2n}w||}A^{2n}w$$

De même par récurrence $\forall i, \forall n \in \mathbb{N}$, $A^n v_i = \lambda_i^n v_i$. Décomposons w sur la base de v_i : $w = \sum w_i v_i$, cela donne

$$w_{2n} = \frac{1}{||\sum \lambda_i^{2n} w_i v_i||} \sum \lambda_i^{2n} w_i v_i = \frac{1}{\sqrt{\sum(\lambda_i^{2n} w_i)^2}} \sum \lambda_i^{2n} w_i v_i$$

Mais on remarque que

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i^{4n} w_i^2} &= |\lambda_1^{2n} w_1| \sqrt{1 + \sum_{i=2}^{4} \frac{\lambda_i^{4n} w_i^2}{\lambda_1^{4n} w_1^2}} \\ &\underset{n \to +\infty}{\sim} |\lambda_1^{2n} w_1|\end{aligned}$$

car λ_1 est la plus grande valeur propre... D'où l'on déduit que toutes les composantes de w_{2n} tendent vers 0 sauf celle sur v_1 qui tend vers ± 1 ; en effet,

$$\begin{aligned} w_{2n} &\underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{i=1}^{4} \frac{\lambda_i^{2n} w_i}{|\lambda_1^{2n} w_1^2|} v_i \\ &\underset{n \to +\infty}{\sim} \pm v_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^{4} \frac{\lambda_i^{2n} w_i}{|\lambda_1^{2n} w_i^2|} v_i}_{\longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty} \\ &\underset{n \to +\infty}{\sim} \pm v_1 \end{aligned}$$

On fait la même chose pour (w_{2n+1}), ce qui donne

$$\boxed{w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pm v_1}$$

Or on remarque que $(w_n | A w_n) = ||A w_n|| (w_n | w_{n+1})$. Par continuité du produit scalaire (bilinéaire en dimension finie) et de la norme (1-lipschitzienne), $(w_n | w_{n+1}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $||A w_n|| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} ||A v_1|| = |\lambda_1|$ Finalement

$$\boxed{(w_n | A w_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} |\lambda_1|}$$

Question 4 A_1 est symétrique réelle, donc est diagonalisable. Tentons de calculer $A_1 v_1$.

$$\begin{aligned} A_1 v_1 &= A v_1 - \lambda_1 v_1 v_1^T v_1 \\ &= \lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1 (v_1 | v_1) \\ &= \lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

λ_1 n'est donc pas valeur propre. Pour $i = 2, 3, 4$, on obtient

$$\begin{aligned} A_1 v_i &= A v_i - \lambda_1 v_1 v_1^T v_i \\ &= \lambda_i v_i - \lambda_1 v_1 (v_i | v_1) \\ &= \lambda_i v_i \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{les } \lambda_i \text{ pour } i = 2, 3, 4 \text{ sont valeurs propres de } A_1}$.

Question 5 Il suffit d'appliquer le même raisonnement à A_1, puis ainsi de suite avec $A_1 - \lambda_2 v_2 v_2^T$...

commentaires(b.a.)

Attention à ne pas faire de changement de variable $u = e^{it}$ (u ne décrirait pas un intervalle de $\mathbf{R}$). Attention à ne pas « reconnaître » la dérivée d'un logarithme. Il existe des « logarithmes » sur $\mathbf{C}$, mais qui ne se manipulent pas comme les logarithmes réels, c'est un peu plus compliqué (pensez aux problèmes posés par la définition de l'argument, ou plutôt des arguments). On peut envisager de multiplier haut et bas par la quantité conjuguée, séparer parties réelle et imaginaire, etc...

On peut aussi faire plus sophistiqué. Sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,+\infty[$, F est C^1, de dérivée

$$F'(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it}-a)^2}\mathrm{d}t$$

(dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre, domination sans trop de problème par une constante, on est sur un segment). A peu de choses près, il s'agit d'une

$$\int_0^{2\pi} \frac{u'(t)}{u^2(t)}\mathrm{d}t$$

et ça s'intègre sans problème, on trouve 0 par périodicité de e^{it}. La fonction F est donc constante sur chacun des intervalles cités ci-dessus. Or elle vaut 1 en 0. Et sa limite en l'infini vaut 0 (minoration directe de $|F(a)|$ ou convergence dominée). Donc elle est nulle sur $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$, et vaut 1 sur $]-1,1[$.

Dans le cas général, écrivons $a = re^{i\phi}$. Alors

$$F(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}-re^{i\phi}}\mathrm{d}t$$

On multiplie haut et bas par $e^{-i\phi}$, on fait le changement de variable $t = u+\phi$, l'intégrale d'une fonction 2π-périodique ne dépend pas du segment de longueur 2π sur lequel on intègre, on trouve que $F(a)$ vaut 1 si $|a|<1$, 0 si $|a|>1$.

$N_r(fg) = N_r(f) + N_r(g)$ ne pose guère de difficulté. Ensuite, si $f(z) = z-a$,

$$N_r(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}-a}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}-a/r}\mathrm{d}t$$

Avec la remarque (utile pour traiter le dénominateur)

$$N_r(1/f) = -N_r(f)$$

on aboutit assez rapidement au résultat.

Corrigé

Planche 1

Math 2 (Python)

commentaires(b.a.)

Les déterminants tridiagonaux se développent par rapport à dernière ligne puis dernière colonne (ou l'inverse!) pour obtenir des relations de récurrence qu'on cherche en général à exploiter. Ici,

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n\Delta_{n-2}$$

Pour les a_n égaux à 1 on obtient la suite de Fibonacci, avec un équivalent classique.

Math 1

commentaire(b.a.)

Première question très intéressante. f est linéaire, or elle est injective, et on est en dimension finie, donc f est surjective, 1_A est atteint...Un grand classique! Deuxième question à peu près du cours (plusieurs manières de procéder, la plus « haut niveau » étant de dire que le morphisme $P \mapsto P(a)$ (détail : ce n'est pas $\widetilde{P}$, ici) est non injectif sur $\mathbf{K}[X]$ car celui-ci est de dimension finie. Mais aussi bien, plus élémentairement, la famille $(1_A, a, \ldots, a^n)$ est liée...

En dimension 2, on peut choisir $a \notin \mathrm{Vect}(1_A)$. La famille $(a^2, a, 1_A)$ est liée, la famille $(1_A, a)$ est libre, c'est donc une base de A, donc il existe u et v réels tels que

$$a^2 = ua + v1_A$$

Maintenant cherchons $b = \alpha a + \beta 1_A$ tel que $b^2 = -1_A$. Cela équivaut à

$$\begin{cases} \alpha^2 u + 2\alpha\beta & = & 0 \\ \alpha^2 v + \beta^2 & = & -1 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $\beta = -\dfrac{u}{2}\alpha$ et $\alpha^2(v + \dfrac{u^2}{4}) = -1$. On aimerait vraiment avoir

$$v + \frac{u^2}{4} < 0$$

Ce qui ressemble à un discriminant...mais de quoi ? Rappelons qie

$$a^2 - ua - v1_A = 0_A$$

Si $u^2 + 4v \geq 0$ on peut factoriser le polynôme $X^2 - uX - v$, par intégrité de A on conclut que $(1_A, a)$ est liée, non...On a donc trouvé b, l'isomorphisme avec $\mathbf{C}$ est alors bien simple.