Extraits Mines Télécom

I. Enoncés

Planche 1 Mines-Telecom 1ère série

Résoudre $y'' - 2y' + y = e^x$.

On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la limite de (u_n) . Étudier la monotonie de (u_n) .
2. Donner une relation entre u_{n+1} et u_n . En déduire un équivalent de u_n .
3. Nature de la série de terme général u_n ? Nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$?

Planche 2 Mines-Telecom 2e série

 Cours

- 1) Définir la notion de valeur propre et du polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- 2) Expliquer le lien entre ces deux notions. A admet-elle toujours une valeur propre?
- 3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A^2 + I_n = 0_n$ et soit λ une valeur propre de A .
A l'aide de la définition d'une valeur propre, montrer que : $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.
Qu'en déduit-on pour l'ensemble des valeurs propres réelles de A ? pour l'ensemble des valeurs propres complexes de A ?

Exercice

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_p(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-pt} dt$$

et

$$J_p(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-pt} dt$$

1. Justifier que l'on définit ainsi deux fonctions J_p et I_p .
2. La fonction I_p est-elle dérivable?
3. Pour x fixé, justifier à l'aide d'une majoration l'existence de la limite $\lim_{p \rightarrow +\infty} I_p(x)$, et calculer la valeur de cette limite.
4. Pour tout p , expliciter $J_p(x)$ en fonction de x .
5. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la série $\sum_{p \geq 1} J_p(p^\alpha)$ est-elle convergente?

Planche 3 Mines-Ponts

Question 1

Résoudre $R^2 + 2R' - RR'' = 0$ avec $R(0) = a > 0$ et $R'(0) \neq 0$.

Question 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$. Montrer que $\det A = 1$.

Planche 4 Mines-Ponts

Question 1

Trouver les $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in [0, 1[, \int_{1-x}^1 \frac{f(t)}{t} dt = f(x)$.

Question 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A)$ est nilpotente.

Exercices Bonus (donné en direct au tableau)

Exercice 1

Étudier, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la définition et la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^\alpha}$$

Exercice 2

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1. On suppose que $na_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et que $\sum a_n x^n$ a une limite finie en 1^- .

1. Montrer que :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \leq \frac{k}{n}$$

2. Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.

Question intermédiaire donnée oralement : montrer que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n ka_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice 3

Donné "en direct"

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{tr}(u) = 0$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u n'a que des 0 sur la diagonale.

Notes

Planche 1 Mines-Telecom 1ère série

Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $t \mapsto (at + b)e^t$, où a et b sont deux constantes réelles. Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto Q(t)e^t$, où Q est un polynôme de degré $0 + 2$ et de valuation ≥ 2 , c'est-à-dire que $Q = kX^2$, où $k \in \mathbb{R}$. On trouve $k = \frac{1}{2}$, et finalement, les solutions de l'équation proposée sont les fonctions telles que

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + ax + b \right) e^x.$$

1. La majoration $|u_n| \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ montre que $\lim u_n = 0$. Comme $x^{n+1} \leq x^n$ pour tout $x \in [0, 1]$, la suite (u_n) est décroissante.
2. On obtient $u_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1-1)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx - u_n = \frac{1}{n+1} - u_n$, ou encore

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}.$$

La décroissance de la suite (u_n) montre que $2u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 2u_n$. En substituant n par $n-1$ dans la première inégalité que l'on vient d'écrire, on obtient $2u_n \leq \frac{1}{n}$. Finalement, on a démontré l'encadrement $\frac{1}{n+1} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n}$, d'où l'on tire immédiatement que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

3. L'équivalent (entre suites de signe fixe) démontré à la question (b) montre que $\sum u_n$ diverge. La décroissance et la limite de la suite (u_n) établies à la question (a) montrent que les hypothèses du théorème spécial des séries alternées sont satisfaites, donc $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Planche 2 Mines-Telecom 2e série

1. Pas de difficulté si le cours sur les intégrales généralisées est acquis.
2. On domine la dérivée partielle par rapport à x , pour $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi : t \mapsto te^{-pt}$ continue positive intégrable et on conclut via le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre (Leibniz)
3. – on majore directement $0 \leq I_p(x) \leq \frac{1}{p}$, en justifiant bien par croissance de l'intégrale.
– variante : Théorème de convergence dominée : pas de difficulté, $\lim_{p \rightarrow +\infty} I_p(x) = 0$.
4. $J_p(x) = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-p)t} dt \right) = \text{Im} \left(\frac{-1}{(ix-p)} \right) = \left(\frac{x}{x^2 + p^2} \right)$.
5. • **3 points** : 0,5pt pour vérifier que la série est à termes positifs avant de prendre l'équivalent ; puis 1pt+0,5pt+1pt (par cas)
 $J_p(p^\alpha) = \frac{p^\alpha}{p^{2\alpha} + p^2}$.
* Si $\alpha < 1$, $J_p(p^\alpha) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} p^{\alpha-2}$, et comme $\alpha - 2 < -1$, il y a convergence.
* Si $\alpha = 1$, $J_p(p^\alpha) = \frac{1}{2p}$, la série diverge.
* Si $\alpha > 1$, $J_p(p^\alpha) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} p^{-\alpha}$, et comme $-\alpha < -1$, il y a convergence.
Ainsi la série $\sum_{p \geq 1} J_p(p^\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha \neq 1$.

Planche 3 Mines-Ponts

On remarque que R ne s'annule pas sur un voisinage V de zéro puisque $R(0) \neq 0$. On peut donc effectuer, sur V , le changement de fonction $u = \frac{1}{R}$. Alors

$$u' = -\frac{R'}{R^2},$$
$$u'' = -\frac{R''}{R^2} + 2\frac{R'^2}{R^3} = \frac{2R'^2 - RR''}{R^3}.$$

En divisant par R^3 l'équation différentielle de l'énoncé, on montre que cette dernière est équivalente, sur V , à $u'' + u = 0$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = \lambda \cos + \mu \sin$. Si l'on désigne par b la valeur de $R'(0)$, on obtient $\lambda = \frac{1}{a}$ et $\mu = u'(0) = -\frac{R'(0)}{R^2(0)} = -\frac{b}{a^2}$. Par suite,

$$\forall t \in V, \quad R(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{a^2}{a \cos t - b \sin t}.$$

Le plus grand intervalle $V_{\max}$ contenant zéro sur lequel l'expression ci-dessus a un sens est

$$V_{\max} = \left] \arctan\left(\frac{a}{b}\right) - \pi, \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \right[, \quad \text{si } b > 0,$$

$$V_{\max} = \left] \arctan\left(\frac{a}{b}\right), \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \pi \right[, \quad \text{si } b < 0.$$

³ correction : Le polynôme $X^2 - 1 + 1$ annule A et est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. De plus, les valeurs propres sont deux à deux conjuguées et, puisque

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \left\{ e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}} \right\},$$

le déterminant de A est produit de nombres complexes conjugués de module 1, donc $\det(A) = 1$.

Planche 4 Mines-Ponts

correction : On raisonne par analyse et synthèse, et on va montrer que les solutions sont les fonctions linéaires $x \mapsto bx$.

Analyse. Si f satisfait les conditions de l'énoncé, elle est dérivable sur $]0, 1[$ avec $\forall x \in]0, 1[, f'(x) = f(1-x)/(1-x)$: attention, il y a deux signes moins dans le calcul de cette dérivée. On en déduit que f est deux fois dérivable sur $]0, 1[$ avec

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f''(x) = -\frac{f'(1-x)}{1-x} + \frac{f(1-x)}{(1-x)^2} = -\frac{f(x)}{x(1-x)} + \frac{f'(x)}{1-x}.$$

Il en résulte que f est solution de l'équation différentielle $x(1-x)y'' - xy' + y = 0$ sur $]0, 1[$. On remarque que l'identité $x \mapsto x$ est une des solutions et qu'elle ne s'annule pas sur $]0, 1[$. On applique alors la méthode d'abaissement de l'ordre, en cherchant les solutions sous la forme $y: x \in]0, 1[\mapsto xg(x)$, où g est deux fois dérivable sur $]0, 1[$.

Alors $y'(x) = xg'(x) + g(x)$, $y''(x) = xg''(x) + 2g'(x)$ et l'équation différentielle devient $\forall x \in]0, 1[, x(1-x)[xg''(x) + 2g'(x)] - x[xg'(x) + g(x)] + xg(x) = x^2(1-x)g''(x) + x[2(1-x) - x]g'(x) = 0$, ou encore

$$\forall x \in]0, 1[, \quad x(1-x)g''(x) + (2-3x)g'(x) = 0.$$

On pose $h = g'$, on décompose en éléments simples $\frac{2-3x}{x(1-x)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{1-x}$, de sorte qu'il s'agit de résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 en h suivante :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad h'(x) + \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} \right] h(x) = 0.$$

Ses solutions sont les fonctions d'expression $h(x) = a \exp(-2 \ln|x| - \ln|x-1|) = a/[x^2(1-x)]$, où a est une constante réelle. Une autre décomposition en éléments simples donne $1/[x^2(1-x)] = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1/(1-x)$. On en déduit que les fonctions g ont pour expression $g(x) = a[-\frac{1}{x} + \ln|x-1|] + b$, où b est une constante réelle. Finalement,

$$\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = a[-1 + x \ln|x-1|] + bx.$$

Synthèse. Pour qu'une fonction dont l'expression sur $]0, 1[$ donnée ci-dessus soit prolongeable par continuité en 1, il faut que $a = 0$. Alors $f: x \mapsto bx$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$ avec la même expression, et on vérifie que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \int_{1-x}^1 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{1-x}^1 \frac{bt}{t} dt = bx = f(x).$$

⁴ correction : Puisque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est semblable à une matrice triangulaire T ayant pour diagonale $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de A . Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Si $P(A)$ est nilpotente, $P(T)$ l'est aussi. Or $P(T)$ est aussi triangulaire et ne peut être nilpotente que si sa diagonale est nulle. Or, la diagonale de $P(T)$ est $(P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n))$. Donc, $P(A)$ est nilpotente si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont racines de P .

Exercices Bonus (donné en direct au tableau)

Commentaire.

15 minutes de préparation, puis 15 minutes (*grosso modo*) sur chaque exercice. Examineur plutôt prompt à débloquer le candidat au besoin, mais ne manifestant de l'enthousiasme guère que pour m'expliquer que ce que j'avais entrepris n'allait pas fonctionner/ne lui convenait pas. Il était au final assez peu intéressé par ce que je racontais.

Ce que j'ai fait pendant l'oral

Exercice 1. Absolument sans raison, durant la préparation, je me suis focalisé sur le cas $\alpha = 0$, totalement inintéressant, alors qu'en réalité le problème est en $\alpha = \frac{1}{2}$. Je n'ai pas eu le temps de finir proprement le cas $\alpha < \frac{1}{2}$, contrairement au cas $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 2. Les hypothèses me faisaient penser à l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson ($np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \dots$) mais cela n'a rien donné. La question 1 se traite par convexité de la fonction $x \mapsto (1-x)^k$. Je n'ai pas eu le temps de finir les deux autres questions, même celle donnée "en direct".

Exercice 3. J'ai presque fini la première question... assez laborieusement. Je n'ai même pas eu assez de temps de regarder la seconde pour être totalement sûr de l'énoncé...

commentaires(b.a.)

Exercice 1 Si $\alpha = 1/2$ la série n'est pas définie. L'idée est que le dénominateur est somme de deux termes, et qu'on doit mettre en facteur le terme prépondérant. Ce terme prépondérant dépend de la position de α par rapport à $1/2$. Si $\alpha > 1/2$, on obtient

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$$

et on peut appliquer le critère de Riemann, pour une comparaison à une série à termes réels positifs.

Pour $\alpha < 1/2$, on a les hypothèses du TSSA sauf, a priori, la décroissance, l'idée est en général dans ce cas de faire un développement asymptotique.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - (-1)^n n^{\alpha-1/2} + o\left(n^{\alpha-1/2}\right) \right)$$

Ou encore, en développant : $u_n = v_n + w_n$ avec $\sum v_n$ qui converge (TSSA) et $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{\alpha-1}$. On est encore ramené au critère de Riemann pour une comparaison de séries à termes réels positifs. Finalement, la synthèse des deux cas est qu'il y a convergence si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha < 0$.

Exercice 2 Les hypothèses sont celles du théorème taubérien faible, voir liasse oral X-ens. La question donnée oralement est une application du théorème hors-programme de Césaro, que l'on obtient par exemple à partir de

$$|ka_k| = o(1)$$

et sommation des relations de comparaison, cas de divergence.

L'inégalité du 1. est simple si $k \geq n$. En revanche elle est fautive pour $k = 0$, $k = 1$, etc... A revoir donc.

Exercice 3 On écrit, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \lambda_x x$. Le tout est de montrer que les λ_x sont tous égaux. Pour montrer que $\lambda_x = \lambda_y$, on distingue deux cas, (x, y) libre et (x, y) liée. Le second est très simple, le premier se traite en écrivant que, d'une part

$$f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$$

et d'autre part

$$f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

ce qui donne $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$. Ensuite, on distingue deux cas. Si u est une homothétie, comme sa trace est nulle, il n'y a rien à faire. Sinon, on prend e_1 tel que $(e_1, f(e_1))$ est libre, dans une base commençant par $(e_1, f(e_1))$ (base incomplète) la matrice de u a un zéro en haut à gauche. Puis récurrence sur la dimension de l'espace, on applique l'hypothèse de récurrence à la matrice privée de sa première ligne et première colonne, on fait des matrices de passage du style

$$\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P \end{pmatrix}$$

et ça marche.