Préparation aux Oraux 2025

Extraits Mines Télecom

Planche 1

Exercice 1
Soit une suite réelle vérifiant $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Etudier u en fonction de u_0. Donner un équivalent de u_n pour $u_0 > 0$.

Exercice 2 On vise une bactérie avec un laser et on la touche avec une probabilité p. La bactérie meurt après avoir été touchée r fois. On note X sa durée de vie. Donner la loi et l'espérance de X.

Planche 2

Exercice 1
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ et g_X sa fonction génératrice, définie sur $]-R_X, R_X[$. On supposer que $R_X > 1$.

1. Soit $(a,b) \in \mathbf{N}^2$. Montrer que la fonction génératrice de $aX+b$ est définie sur $]-R_X^{1/a}, R_X^{1/a}[$ et l'exprimer en fonction de g_X.
2. Justifier que g_X est bien définie en 1 et en -1. Montrer que
$$P(X \text{ pair}) = \frac{g_X(1) + g_X(-1)}{2}$$
$$P(X \text{ impair}) = \frac{g_X(1) - g_X(-1)}{2}$$
3. Application lorsque X suit une loi de Poisson et lorsque X suit une loi binomiale.

Exercice 2

1. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad \det(C+X) = \det(X)$$
Montrer que $C = 0$.
2. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))^2$ telles que
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad \det(A+X) = \det(B+X)$$
Que dire de A et B ?

Corrigé

Planche 1

commentaire (r.c.)

Examinateur peu bavard mais correct. Il a mis du temps avant de donner un premier indice pour l'équivalent de u_n. Précision importante : pas de préparation.

---

commentaire (b.a.)

Exercice 1 Une petite étude de la fonction $x \mapsto x\exp(-x)$ et un tracé de l'allure du graphe sera appéciée par l'examinateur. Le cas $u_0 = 0$, simple, est écarté. On suppose $u_0 > 0$, on a alors par récurrence $u_n > 0$ pour tout n. On a décroissance de (u_n), qui converge donc vers $\ell \geq 0$. Et, de

$$\ell = \ell\exp(-\ell)$$

on tire $\ell = 0$. Donc

$$u_{n+1} = u_n(1 - u_n + (u_n))$$

ou mieux

$$u_{n+1}^\alpha = u_n^\alpha(1 - \alpha u_n + (u_n))$$

d'où l'on tire

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} -\alpha u_n^{\alpha+1} + \mathrm{o}(u_n^{\alpha+1})$$

D'où l'idée de prendre $\alpha = -1$, pour avoir

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$$

Et on peut sommer les relations de comparaison (cas de divergence, transmission aux sommes partielles), on obtient quelque chose comme

$$u_n \equiv \frac{1}{n}$$

Exercice 2 Starwars en biochimie : exercice de la liste CCP. Bizarre aux Mines. En même temps, la binomiale négative est un grand classique à maîtriser.

Planche 2

commentaires(d.m)

L'oral commence avec 10 minutes de préparation. Le premier exercice est sans difficulté.
On supposer $a \geq 1$, la fonction génératrice de la constante b étant

$$t \mapsto t^b$$

définie sur $\mathbf{R}$, a fortiori sur $]-R_X, R_X[$. Si $a \geq 1$, donc, et si $|t| < (R_X)^{1/a}$, on a $|t^a| < R_X$ et donc on peut écrire

$$E(t^{aX+b}) = t^b E\left((t^a)^X\right) = t^b g_X(t^a)$$

Une fois arrivé à la question 3 pour une loi de Poisson, l'examinateur rajoute une question de cours : donner l'espérance et la variance d'une loi de Poisson. Ensuite, la moitié du temps était écoulée, on est passé à l'exercice 2 sans faire le cas de la loi binomiale.
Exercice 2 : pour la première question, j'ai commencé par prendre le cas $X = C$. On obtient que $0 \in \mathrm{Sp}(C)$ et donc que C est semblable à une matrice dont la première colonne est nulle. En notant A la matrice extraite de M contenant les $n-1$ dernières lignes et colonnes de M et en considérant les matrices ayant pour première colonne $(1, 0, \ldots, 0)$ on obtient

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R}) \qquad \det(A + X) = \det(X)$$

Et là je dis que par récurrence on en déduit que $\mathrm{Sp}(C) = \{0\}$. L'idée d'une récurrence descendante ne plaît pas à l'examinateur et il m'oriente vers un raisonnement par l'absurde. On suppose, en notant r le rang de C, que $r > 0$. Donc C est équivalente à la matrice J_r. On obtient alors

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \qquad \det(J_r + X) = \det(X)$$

Or en prenant X la matrice formée de I_{n-r} en bas à droite et des 0 partout ailleurs on trouve une contradiction.
Je n'ai pas eu le temps de beaucoup réfléchir à la question 2 (j'ai trouvé la solution une fois sorti de l'oral : il suffit de remplacer X par $X - A$, on se retrouve dans le cas de la première question avec $C = B - A$).
L'examinateur m'a d'abord demandé de montrer que pour toutes matrices A et B dont le produit est bien défini,

$$\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$$

Puis il m'a demandé les grandes idées de la démonstration du fait que toute matrice de rang r est équivalente à J_r.

commentaires(b.a.)

Walid propose de prendre $X = -\lambda I_n$ pour montrer que $\text{Sp}(C) = \{0\}$, ce qui marche très bien. Mais évidemment, une fois montré cela, il faut quand même encore dire des choses pour finir l'exercice.

était scindé à racines simples...alors on peut décomposer *cf corrigé ci-dessous*).
Pour la deuxième question, j'ai vu que le problème était avec $\lambda_1 = 0$ 'les autres valeurs propres étant non nulles) mais avec les noyaux emboîtés (qu'il ne m'a pas demandé de redémontrer, juste d'énoncer) on s'en sort.
On est passé à l'analyse pour les 15 dernières minutes. Pour la définition, DL et croissances comparées en 0, un changement de variable $u = 1 - t^x$ pour l'autre borne. Après on développe $\ln(1 - t^x)$ en série entière, puis j'ai échangé série/intégrale en disant que je le démontrerais après, ce que je n'ai pas eu le temps de faire...après une intégration par parties (j'ai bien tout prononcé !) on s'en sort. Voilà tout !

---

commentaire(b.a.)

L'exercice 1 part sur un grand classique de l'oral : si, dans $GL_n(\mathbf{C})$, une matrice a une puissance diagonalisable, alors elle est diagonalisable. Ici par théorème spectral A^N est diagonalisable, elle admet un polynôme annulateur scindé simple P. Mais $P(X^N)$ annule alors A. Est-il scindé simple ? pour le voir, on écrit

$$P(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - a_i)$$

où les a_i sont deux à deux distincts. A quoi sert l'hypothèse d'inversibilité de A ? à pouvoir supposer les a_i non nuls (on peut par exemple choisir pour P le polynôme minimal de A^N, cette matrice n'ayant pas 0 pour valeur propre). Chaque a_i a exactement N racines N-ièmes distinctes : $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,N}$. On a alors

$$P(X^N) = \prod_{i=1}^{r}(X^N - a_i) = \prod_{i=1}^{r}\left(\prod_{k=1}^{N}(X - \alpha_{i,k})\right)$$

qui est scindé simple (deux nombres complexes qui n'ont pas la même puissance N-ième ne peuvent pas être égaux). Et donc A est diagonalisable.
La deuxième question enrichit l'exercice car elle oblige à faire un peu d'algèbre linéaire pas seulement avec les polynômes. Reprenons les notations précédentes, avec $a_1 = 0$ et les autres a_i non nuls. Alors

$$X^N \prod_{i=2}^{r}(X^N - a_i) = X^N \prod_{i=2}^{r}\left(\prod_{k=1}^{N}(X - \alpha_{i,k})\right)$$

annule A, on peut appliquer le lemme des noyaux et en déduire que

$$\mathbf{C}^n = \mathrm{Ker}(A^N) \bigoplus \left[\bigoplus_{i=2}^{r}\left(\bigoplus_{k=1}^{N}\mathrm{Ker}(A - \alpha_{i,k} I_n)\right)\right]$$

Or le résultat des noyaux emboîtés (que l'examinateur peut demander de redémontrer s'il y a le temps) dit que

$$\dim\left(\mathrm{Ker}(A^2)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(A)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(A^N)\right) = 1$$

Donc on peut réécrire

$$\mathbf{C}^n = \mathrm{Ker}(A) \bigoplus \left[\bigoplus_{i=2}^{r} \left(\bigoplus_{k=1}^{N} \mathrm{Ker}(A - \alpha_{i,k} I_n) \right) \right]$$

ce qui montre la diagonalisabilité.
Les matrices nilpotentes montrent que l'hypothèse sur les dimensions de noyaux est utile...

Exercice 2 La fonction $h\ :\ \ln(t)\ \ln(1-t^x)$ est continue sur $]0,1[$, positive. Au voisinage de 0 :

$$h(t) \sim -t^x \ln t$$

et donc h a une limite nulle en 0, « faux problème ». En 1, Florent suggère un changement de variable, pourquoi pas. On est ramené à une situation semblable à celle du voisinage de 0. On peut développer sur $]0,1[$

$$h(t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} t^{kx} \ln t$$

et définir $\psi_k\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{k} t^{kx} \ln t$ qui s'intègre assez facilement par parties sur $]0,1[$,

$$\int_0^1 \psi_k(t)\mathrm{d}t = \frac{-1}{k(kx+1)^2}$$

ce qui permet une interversion sans souci, avec convergence de $\sum N_1$. L'expression

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(kx+1)^2}$$

permet alors une comparaison série/intégrale, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t(tx+1)^2}$$

étant décroissante positive intégrable sur $]0,+\infty[$. On en déduit limite et équivalent.

Oral 15 (Jules Côte, Centrale math 2 (Python)).
On définit la suite (Δ_n) par $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a_1 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a_1 & 1 & -1 \\ 0 & a_2 & 1 \end{vmatrix}$,