Préparation aux Oraux 2025

Extraits Mines Télecom

Planche 1

Exercice 1

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on suppose qu'il existe $N \geq 1$ tel que $A^N \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. On suppose $A \in GL_n(\mathbf{C})$. Montrer que A est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$).
2. On suppose maintenant $A \notin GL_n(\mathbf{C})$, mais dim $\left(\mathrm{Ker}(A^2)\right) = 1$. Montrer que A est encore diagonalisable (toujours sous l'hypothèse $A^N \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$).
3. L'hypothèse sur le noyau est-elle utile ?

Exercice 2

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ \ln(1-t^x)\ \mathrm{d}t$ avec $x > 0$.

1. Montrer que f est définie.
2. Montrer que f s'écrit comme série de fractions rationnelles.
3. Donner un équivalent de f et sa limite en 0

Planche 2

Exercice 1 Soit E un sev de dimension ≥ 2, V et W des sev de $\mathcal{L}(E)$ autres que $\{\Theta\}$ tels que $V \oplus W = \mathcal{L}(E)$ et

$$\forall (v,w) \in V \times W \qquad v \circ w + w \circ v = \Theta$$

1. Soit $(v,w) \in V \times W$ tels que $Id_E = v + w$. Montrer que v et w sont deux projecteurs non nuls.
2. Soit $\mathcal{B}$ adaptée à $E = \mathrm{Ker}v \bigoplus \mathrm{Im}v$. Donner la matrice dans la base $\mathcal{B}$ des éléments de V et W.
3. Qu'en déduit-on ?

Exercice 2 Soit l'équation différentielle

$$y'' - y = \frac{1}{1+x^2}$$

(sur $\mathbf{R}$). Résoudre ; puis : y-a-t-il des solutions bornées ?

Corrigé

Planche 1

commentaire(f.m.)

Examinateur plutôt gentil, me donnait des indications quand c'était nécessaire, il m'a laissé 15 minutes de préparation pendant que le candidat précédent passait, il y avait des bouchons d'oreille mais j'avais les miens.
Pendant la préparation je n'ai pas beaucoup avancé, l'aspect matriciel avec la trigonalisation ou le théorème spectral n'ont rien donné, donc je suis arrivé devant l'examinateur avec pas grand chose...J'ai quand même proposé de passer aux endomorphismes canoniquement associés, il m'a demandé une CNS de diagonalisabilité, j'ai essayé de parler de polynôme caractéristique, en m'embrouillant un peu, il m'a dit que c'était simplement que le polynôme minimal était scindé à racines simples...alors on peut décomposer *cf corrigé ci-dessous*).
Pour la deuxième question, j'ai vu que le problème était avec $\lambda_1 = 0$ 'les autres valeurs propres étant non nulles) mais avec les noyaux emboîtés (qu'il ne m'a pas demandé de redémontrer, juste d'énoncer) on s'en sort.
On est passé à l'analyse pour les 15 dernières minutes. Pour la définition, DL et croissances comparées en 0, un changement de variable $u = 1 - t^x$ pour l'autre borne. Après on développe $\ln(1 - t^x)$ en série entière, puis j'ai échangé série/intégrale en disant que je le démontrerais après, ce que je n'ai pas eu le temps de faire...après une intégration par parties (j'ai bien tout prononcé !) on s'en sort. Voilà tout !

---

commentaire(b.a.)

L'exercice 1 part sur un grand classique de l'oral : si, dans $GL_n(\mathbf{C})$, une matrice a une puissance diagonalisable, alors elle est diagonalisable. Ici par théorème spectral A^N est diagonalisable, elle admet un polynôme annulateur scindé simple P. Mais $P(X^N)$ annule alors A. Est-il scindé simple ? pour le voir, on écrit

$$P(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - a_i)$$

où les a_i sont deux à deux distincts. A quoi sert l'hypothèse d'inversibilité de A ? à pouvoir supposer les a_i non nuls (on peut par exemple choisir pour P le polynôme minimal de A^N, cette matrice n'ayant pas 0 pour valeur propre). Chaque a_i a exactement N racines N-ièmes distinctes : $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,N}$. On a alors

$$P(X^N) = \prod_{i=1}^{r}(X^N - a_i) = \prod_{i=1}^{r}\left(\prod_{k=1}^{N}(X - \alpha_{i,k})\right)$$

qui est scindé simple (deux nombres complexes qui n'ont pas la même puissance N-ième ne peuvent pas être égaux). Et donc A est diagonalisable.
La deuxième question enrichit l'exercice car elle oblige à faire un peu d'algèbre linéaire pas seulement avec les polynômes. Reprenons les notations précédentes, avec $a_1 = 0$ et les autres a_i non nuls. Alors

$$X^N\prod_{i=2}^{r}(X^N - a_i) = X^N\prod_{i=2}^{r}\left(\prod_{k=1}^{N}(X - \alpha_{i,k})\right)$$

annule A, on peut appliquer le lemme des noyaux et en déduire que

$$\mathbf{C}^n = \mathrm{Ker}(A^N)\bigoplus\left[\bigoplus_{i=2}^{r}\left(\bigoplus_{k=1}^{N}\mathrm{Ker}(A - \alpha_{i,k}I_n)\right)\right]$$

Or le résultat des noyaux emboîtés (que l'examinateur peut demander de redémontrer s'il y a le temps) dit que

$$\dim\left(\mathrm{Ker}(A^2)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(A)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(A^N)\right) = 1$$

Donc on peut réécrire

$$\mathbf{C}^n = \mathrm{Ker}(A) \bigoplus \left[\bigoplus_{i=2}^{r} \left(\bigoplus_{k=1}^{N} \mathrm{Ker}(A - \alpha_{i,k} I_n) \right) \right]$$

ce qui montre la diagonalisabilité.
Les matrices nilpotentes montrent que l'hypothèse sur les dimensions de noyaux est utile...

Exercice 2 La fonction $h \ : \ \ln(t) \ \ln(1-t^x)$ est continue sur $]0,1[$, positive. Au voisinage de 0 :

$$h(t) \sim -t^x \ln t$$

et donc h a une limite nulle en 0, « faux problème ». En 1, Florent suggère un changement de variable, pourquoi pas. On est ramené à une situation semblable à celle du voisinage de 0. On peut développer sur $]0,1[$

$$h(t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} t^{kx} \ln t$$

et définir $\psi_k \ : \ t \mapsto \dfrac{1}{k} t^{kx} \ln t$ qui s'intègre assez facilement par parties sur $]0,1[$,

$$\int_0^1 \psi_k(t) \mathrm{d}t = \frac{-1}{k(kx+1)^2}$$

ce qui permet une interversion sans souci, avec convergence de $\sum N_1$. L'expression

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(kx+1)^2}$$

permet alors une comparaison série/intégrale, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t(tx+1)^2}$$

étant décroissante positive intégrable sur $]0,+\infty[$. On en déduit limite et équivalent.

Planche 2

commentaires (r.b.)

Exercice 1 : j'avais un peu de mal à me réveiller, mais j'ai vite commencé à raconter des choses, plein de choses, qui n'aboutissaient pas forcément, mais finalement j'ai fini par le faire.

Exercice 2 : c'était un peu mieux, ça allait plus vite.
Examinateur complètement silencieux jusqu'à la dernière question où il m'a éclairci un peu le chemin.

commentaires (b.a.)

Exercice 1 On compose par v à gauche et à droite : $v = v^2 + v \circ w$, $v = v^2 + w \circ v$. On ajoute, on obtient $v = v^2$. De même $w = w^2$. Non nuls ? si l'un est nul, l'autre est Id_E. Supposons $Id_E \in V$, alors, pour tout $w \in W$, $w + w = \Theta$. Donc $W = \{\Theta\}$. Et $V = L(E)$. Non.
Ensuite, si $w \in W$, si $x \in \mathrm{Ker}v$, $v(w(x)) = 0_E$, donc $\mathrm{Ker}v$ est stable par w. De même $w(v(y)) = -v(w(y))$ montre que $\mathrm{Im}(v)$ est stable par w. Mais par rapport à v, les noyau et image de w sont permutés, et donc $\mathrm{Ker}v$ et $\mathrm{Im}v$ sont aussi stables par tous les éléments de V. Bref les matrices de tous les éléments de V et de W dans B sont diagonales par blocs. Ce qui implique que tous les éléments de $L(E)$ ont la même propriété. On en déduit que cela ne peut pas se produire.
Exercice 2 Solutions de l'équation homogène : $x \mapsto ae^x + be^{-x}$, a et b réels. On cherche ensuite une solution de la forme

$$\phi \ : \ x \mapsto a(x)e^x + b(x)e^{-x}$$

avec la condition additionnelle

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad e^x a'(x) + e^{-x} b'(x) = 0$$

on a alors

$$\phi' \ : \ x \mapsto a(x)e^x - b(x)e^{-x}$$

et

$$\phi'' \ : \ x \mapsto a'(x)e^x - b'(x)e^{-x} + a(x)e^x + b(x)e^{-x}$$

$\phi''(x) - \phi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ devient alors

$$e^x a'(x) - e^{-x} b'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

On obtient $a'(x) = \dfrac{e^{-x}}{2(1+x^2)}$, $b'(x) = -\dfrac{e^x}{2(1+x^2)}$, et donc les solutions :

$$x \mapsto Ke^x + Le^{-x} + e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t - e^{-x} \int_0^x \frac{e^t}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

De plus, $Le^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, et $e^{-x} \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (pour cette dernière, intégration de la relation o, cas de non intégrabilité, en partant de

$$\frac{e^x}{2(1+x^2)} = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(e^x)$$

ou alors majoration simple). Pour que la fonction soit bornée, on voit alors qu'il faut

$$K = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

Mais, réciproquement, la fonction

$$x \mapsto -e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

est bornée au voisinage de $+\infty$ comme on le voit avec intégration de la relation o, cas d'intégrabilité cette fois, en partant de

$$\frac{e^{-x}}{2(1+x^2)} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^{-x}\right)$$

Et elle tend vers 0 en $-\infty$, intégration des relations de comparaison ou majoration directe. On traite de même l'autre partie de l'expression, on trouve une solution bornée, une seule d'ailleurs.