CPGE Ibn Ghazi
MP*1 (Rabat)

Prof. MAMOUNI
myismail.net

PREPARATION ORAL MINES_TELECOM

EX01

1) Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ non diagble, mq $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ et N nlp d'indice 2 tq $A = \alpha I + N$

2) Resoudre $M^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

EX2

p premier, $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ corps
$K_2[X] = \{P \in K[X] \text{ tq } \deg P \leq 2\}$

1) Card $K_2[X]$??
2) Card $\{P \in K_2[X] \text{ Non scindé}\}$
3) En deduire $\exists M \in M_2(K)$ Non trigble

EX3

on cherche $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $P(\cos x) = \cos(P(x))$ $\forall x \in \mathbb{R}$

1) les sol deg = 0
2) les sol deg = 1
3) toutes les sol

EX4

Règle et calcul de $\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right) dt$

et $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx$

EX5 chasse au trésor

on dispose N coffre, on choisit un au hasard de façon équiprobable

~~On~~ on place le tresor ds ce coffre avec une probabilite p

quelle est la probabilite que le N° coffre contient le tresor sachant que les N-1 ne le contiennent pas

Indications

Ex 1

① $A \in M_2(\mathbb{C})$ et Non diag $\Rightarrow \chi_A(X) = (X-\alpha)^2 = \Pi_A(X)$

prendre $N = A - \alpha I$

② $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ il faut trigonaliser $A = PTP^{-1}$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M^n = A \Rightarrow MA = AM \Rightarrow M' = P^{-1}MP \in C_T$

on trouve $M' = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ puis $(M')^n = T$

$M' = aI_2 + N \Rightarrow (M')^n = \ldots$

on trouve M' puis $\underline{M}$

Ex 2

① $\varphi : K^3 \to K_2[X]$ bij $\Rightarrow$ Card $= p^3$

$(a,b,c) \mapsto aX^2 + bX + c$

② on cherche Card (Complementaire)

$P = cte$ $\Downarrow$ Card $= p$

P scindé $\Downarrow$ $a(X-b)$ $\quad a \neq 0$, b qcq $\Downarrow$ Card $= p(p-1)$

$a(X-b)(X-c)$

$a \neq 0$, b, c qcq

$(p-1)\binom{p}{2} = \dfrac{p(p-1)^2}{2}$

Total

$p^3 - p - p(p-1) - \dfrac{p(p-1)^2}{2}$

$= \dfrac{p}{2}(p-1)^2$

③

③ P Non scindé $\Downarrow$ C_P Non trigo

Ex3

1) $\alpha = \cos\alpha$ étude de fct $f(x) = x - \cos x$ $\nearrow$

$\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty \Rightarrow$ sol unique

2) $P(X) = aX + b$ tq $a \neq 0$

$\Updownarrow$

$a\cos x + b = \cos(ax+b) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

on dérive deux fois $\cos x = a\cos(ax+b)$

$\cos x = a^2 \cos x + ab$

$(1-a^2)\cos x = ab$

donc $a^2 = 1$, $a = \pm 1$ et $ab = 0$ et $b = 0$

$a = 1 \Rightarrow P(X) = X$ sol

$a = 1 \Rightarrow P(X) = -X \Rightarrow -\cos(x) = \cos(-x)$ Non

3) Cas gl : on dérive $\left| \underbrace{\sin x\, P'}_{\text{borné}}(\cos x) = \underbrace{P'(x)}_{\text{Non borné}} \underbrace{\sin P(x)}_{\text{borné}} \right|$

$|\cos(x)| \leq 1$

$\exists M > 0$ tq $|\sin x\, P'(\cos x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$|P'(x)| \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \Rightarrow \exists A > 0 \ \forall x > A, \ |P'(x)| \geq M + 1$

TVI $\Rightarrow \exists x_0 \geq A$ tq $P(x_0) = \frac{\pi}{2} + n\pi > M$

car $|P(x)| \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Contradiction pour $x = x_0$

EX 4

cvgce en ∞ : $\ln(1+\frac{1}{t^2}) \sim \frac{1}{t^2}$

cvgce en 0 $\ln(1+t^2) - 2\ln t$

$\ln(1+t^2) \sim t^2$ et $\int_0^{\varepsilon} t^2 dt$ cvge

$\int_0^{\varepsilon} \ln t \, dt$ cvge

$$\int_{\varepsilon}^{A} 1 \cdot \ln(1+\frac{1}{t^2}) = \left(t \ln(1+\frac{1}{t^2})\right)_{\varepsilon}^{A} + 2\int_{\varepsilon}^{A} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$u' = 1$

EX 5 A_k : le k^e coffre contient le tresor

on cherche $p(A_N)$

$$= p\frac{(\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_{N-1} \cap A_N)}{p(\bar{A}_1 \cap \cdots \bar{A}_{N-1})} = \frac{p(A_N)}{p(\bar{A}_1 \cap \cdots \bar{A}_{N-1})}$$

$\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_{N-1}$

$A_k = C_k \cap A$ C_k : on choisit le coffre k independ

A : on met le tresor

$p(A_k) = p(C_k)p(A) = \frac{1}{N} \cdot p$

$A_N \subset \bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_{N-1}$

$$p(\bar{A}_1 \cdots \cap \bar{A}_{N-1}) = 1 - p(A_1 \cup \cdots \cup A_{N-1})$$ deux à deux disj

$$= 1 - \sum p(A_i)$$

$$= 1 - (N-1)\frac{p}{N}$$