

Préparation Oral Mines
Extrait 2024

Ex1 Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$

Ma $\exists M \in M_n(\mathbb{C})$ tq $\text{rg} M = 1$ et $AM = MB$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{\mathbb{C}} \text{Sp}(A) \cap \bigcup_{\mathbb{C}} \text{Sp}(B) \neq \emptyset$$

Ex2 Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tq

a) $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$

b) $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

c) $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$

Ex3 $0 < a < b$ Convergence et calcul

$$\text{de } I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$$

Ex4 $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, $B \in M_{p,n}(\mathbb{C})$

$$\text{Ma } p + \text{rg}(I_n + AB) = n + \text{rg}(I_p + BA)$$

Indications

EX1



- 1) Mq $AM^2 = M^2B^2$ puis conclure
- 2) Vérifier que $P(A)M = MP(B) \quad \forall P \in K(x)$
- 3) Mq $X_B(A)$ non inversible
- 4) Conclure



- 1) Justifier que $\exists X, Y$ admissibles non nuls tq $M = X^t Y$
- 2) Analyse - synthèse $AM = MB \Leftrightarrow AX^t Y = X^t YB$
Comment peut-on choisir X et Y
sachant que $\exists \lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$

EX2

- a) 1) ça revient à P surj car $\forall w \in \mathbb{C} \quad \exists z \in \mathbb{C} \quad \text{tq } P(z) = w$
2) $P \neq \text{cte}$ (à remarquer)
3) Appliquer D'Alembert - Gauss à $Q(X) = P(X) - w$
- b) 1) Mq $P \in \mathbb{R}(x)$ utilisant les poly d'interpolation de Lagrange aux pb $k \in \mathbb{N}$
2) Mq deg P pair est impossible
3) Conclure (TVI)
- c) 1) Mq $P \in \mathbb{Q}(x)$ pareil que b)
2) Mq deg P pair impossible
3) Vérifier que $P(x) = ax + b$ réel et $P(x) = x^3$ non réel
4) Mq $\exists \alpha \in \mathbb{Z}$ tq $\tilde{P} = \alpha P$ vérifier $\tilde{P}(\phi) = 0$ et $\tilde{P} \in \mathbb{Z}(x)$
- d) pour $\tilde{P}(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ tq $a_k \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 2$
Soit p premier $a \wedge b = 1$ tq $\tilde{P}(\frac{a}{p}) = \frac{1}{p^k}$
Mq p divise b puis $m \mid a_n$
Conclure

(2/4)

Ex 3

1) Qqle : en 0 passer aux équivalents
en $+\infty$ $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 f(t) = 0$

2) Calcul

- Poser $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ A \rightarrow +\infty}} I_{\varepsilon, A}$

où $I_{\varepsilon, A} = \int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$

- repasser $I_{\varepsilon, A}$ plus chgt de variable

- Vérifier que $I_{\varepsilon, A} = I_{\varepsilon} + I_A$

tg $I_{\varepsilon} = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx$ et $I_A = \int_{aA}^{bA} \frac{e^{-x}}{x} dx$

- Vérifier que $\lim_{A \rightarrow +\infty} I_A = 0$

- dans I_{ε} : $\frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-x} - 1}{x} + \frac{1}{x}$

- Conclure quand $\varepsilon \rightarrow 0$ $I = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Ex 4)

- 1) Énoncer la formule du rang pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$
- 2) Justifier que le pb se ramène à
$$\dim \operatorname{Ker}(I_n + AB) = \dim \operatorname{Ker}(I_p + BA)$$
- 3) Construire une app injective
$$\varphi: \operatorname{Ker}(I_p + BA) \rightarrow \operatorname{Ker}(I_n + AB)$$
$$x \mapsto ?$$
- 4) Conclure

(4/4)