

MP* 1 (Rabat)
Groupe 2

Devoir Maison : Réduction

Basic Level

Pb
1

Diagonalisation simultanée.

Soient \mathbf{u} et \mathbf{v} deux endomorphismes diagonalisables de \mathbf{E} , qui commutent, c'est à dire tels que $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (resp. μ_1, \dots, μ_q) les valeurs propres de \mathbf{u} (resp. de \mathbf{v}), et $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_p$ les espaces propres associés (resp. $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_q$).

1 → Dire pourquoi chaque \mathbf{G}_j (resp. \mathbf{F}_i) est stable par \mathbf{u} (resp. \mathbf{v})

2 → On pose $\mathbf{H}_{i,j} = \mathbf{F}_i \cap \mathbf{G}_j$. Soit $i \in \{1, \dots, p\}$.

a Montrer que $\mathbf{H}_{i,j} \cap \sum_{k \neq j} \mathbf{H}_{i,k} = \mathbf{0}$.

b Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{F}_i$, justifier l'existence des $\mathbf{x}_j \in \mathbf{G}_j$ tel que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_q$.

c Calculer $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ de deux façons, en déduire que $\mathbf{x}_j \in \mathbf{F}_i$.

d Conclure que $\mathbf{F}_i = \bigoplus_{j=1}^q \mathbf{H}_{i,j}$.

3 → En déduire l'énoncé suivant :

Lorsque deux endomorphismes diagonalisables \mathbf{u} et \mathbf{v} commutent, il existe une base formée de vecteurs propres communs à \mathbf{u} et à \mathbf{v} (en d'autres termes, \mathbf{u} et \mathbf{v} sont diagonalisables simultanément dans la même base).

4 → Deuxième méthode :

a Dire pourquoi les sous-espace vectoriel \mathbf{G}_j sont stable par \mathbf{u} .

b En déduire que $\mathbf{u}|_{\mathbf{G}_j}$ est diagonalisable.

c En déduire qu'il existe une base formée de vecteurs propres communs à \mathbf{u} et à \mathbf{v}

5 → **Application** Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables qui commutent.

a Montrer qu'il existe \mathbf{P} inversible et \mathbf{D}, \mathbf{D}' diagonales, telle que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{D}'\mathbf{P}^{-1}$.

b En déduire que $\mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{A} - \mathbf{B}$ et $\mathbf{A}\mathbf{B}$ sont diagonalisable.

c Donner un exemple de deux matrices diagonalisables, dont la somme ne l'est pas.

Pb
2

Décomposition de Dunford .

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se propose de montrer qu'il existe deux matrices uniques \mathbf{D}, \mathbf{N} telles que $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$, \mathbf{D} est diagonalisable, \mathbf{N} est nilpotente, $\mathbf{D}\mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{D}$. Pour cela on considère \mathbf{E} un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ associé à la matrice \mathbf{A} dans une base donnée de \mathbf{E} , on pose $\pi_{\mathbf{u}}(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\mathbf{E}_i = \ker(\mathbf{u} - \lambda_i \text{id}_{\mathbf{E}})^{\alpha_i}$ et enfin $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}|_{\mathbf{E}_i}$.

1 Existence : a Dire pourquoi $\mathbf{E} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{E}_i$.

- b Soit $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i$ une base adaptée à cette somme, que peut-on dire de la forme de $\mathbf{B} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{u})$.
- c Montrer que $\mathbf{u}_i - \lambda_i \text{id}_{\mathbf{E}_i}$ est nilpotent.
- d Soit $\mathbf{B}_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{u}_i)$, montrer que $\mathbf{B}_i = \mathbf{D}_i + \mathbf{N}_i$ avec \mathbf{D}_i matrice scalaire et \mathbf{N}_i nilpotente.
- e En déduire l'existence de la décomposition de Dunford.

2 Unicité :

Soit $\mathbf{A} = \mathbf{D}' + \mathbf{N}'$ une autre décomposition de Dunford. On pose $\mathbf{D}' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{d}')$ et $\mathbf{N}' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{n}')$.

- a Montrer que $\mathbf{A}\mathbf{D}' = \mathbf{D}'\mathbf{A}$
- b En déduire que les \mathbf{E}_i sont stables par \mathbf{d}' .
- c Que peut-on dire de la forme de \mathbf{D}' .
- d En déduire que $\mathbf{D}\mathbf{D}' = \mathbf{D}'\mathbf{D}$, puis que $\mathbf{D} - \mathbf{D}'$ est diagonalisable.
- e En déduire que $\mathbf{D} = \mathbf{D}'$, puis conclure.

Pb
3

Centrale MP 2003.

Soit \mathbf{E} un espace vectoriel de dimension finie et $\mathbf{u} \in \mathcal{L}\mathbf{E}$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{u}} : \mathcal{L}(\mathbf{E}) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{E}) \\ \mathbf{v} &\longmapsto \mathbf{v} \circ \mathbf{u} \end{aligned}$$

1 Montrer que $\Phi_{\mathbf{u}} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbf{E}))$.

2 On se propose de montrer l'équivalence suivante : (\mathbf{u} est diagonalisable) $\iff \Phi_{\mathbf{u}}$ est diagonalisable)

a 1ère méthode :

i Montrer que pour tout $\mathbf{P} \in \mathbb{K}[X]$, $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, on a

$$\mathbf{P}(\Phi_{\mathbf{u}})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \circ \mathbf{P}(\mathbf{u})$$

ii En déduire que \mathbf{u} et $\Phi_{\mathbf{u}}$ ont mêmes polynômes annulateurs, puis conclure.

b 2ème méthode :

i Montrer que $\lambda \in \text{sp}(\Phi_{\mathbf{u}}) \iff \mathbf{u} - \lambda \text{id}_{\mathbf{E}}$ n'est pas surjectif.

ii En déduire que $\text{sp}(\Phi_{\mathbf{u}}) = \text{sp}(\mathbf{u})$.

iii Soit $\lambda \in \text{sp}(\mathbf{u})$ et $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$ tel que $(\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v})$. Montrer que :

α $\text{Im}(\mathbf{u} - \lambda \text{id}_{\mathbf{E}}) \subset \ker \mathbf{v}$.

β $\ker(\Phi_{\mathbf{u}} - \lambda \text{id}_{\mathcal{L}(\mathbf{E})})$ est isomorphe $\mathcal{L}\mathbf{H}, \mathbf{E}$ où \mathbf{H} est un supplémentaire de $\text{Im}(\mathbf{u} - \lambda \text{id}_{\mathbf{E}})$.

γ $\dim(\ker(\Phi_{\mathbf{u}} - \lambda \text{id}_{\mathcal{L}(\mathbf{E})})) = \dim(\mathbf{E}) \dim(\ker(\mathbf{u} - \lambda \text{id}_{\mathbf{E}}))$

iv Conclure.