Espaces préhilbertiens réels

Elementary Level

Problème 1

Partie A : . Polynômes de Laguerre :
On pose pour entier, n et réel, x : $L_n(x)=(-1)^n e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$

1) Montrer que L_n est un polynôme, préciser son degré, ainsi que son coéfficient dominant.
2) Donner L_0, L_1, L_2.
3) Pour $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonctions polynomiales, on pose $\left(\overrightarrow{f}\,|\,\overrightarrow{g}\right)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.
   Montrer que cet intgrale existe et qu'ainsi on muni $\mathbb{R}[X]$ d'un produit scalaire.
4) Montrer que si $k<n$ alors $\left[(x^n e^{-x})^{(k)}\right](0)=0$.
5) En déduire que pour tout $k<n$ on a : $<L_k, L_n>=0$, puis que $(L_k)_{0\le k\le n}$ est une famille orthogonale.
6) Pour tout entier k ,on pose $I_k=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$, justifier l'existence de cet intgrale, puis base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.
7) En déduire $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}(t^2+at+b)^2 e^{-t}\mathrm{d}t$.

Partie B : . Polynômes de Tchebychev :
On pose pour n entier et $-1\le x\le 1$, $T_n(x)=\cos(nArccos(x))$.

1) Montrer que $T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=2xT_n(x)$.
2) Pour tous $f,g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ continues, on pose :
$$\left(\overrightarrow{f}\,|\,\overrightarrow{g}\right)=\int_{-1}^{1}\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$
   Montrer que cet intégrale existe et qu'ainsi on muni $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ d'un produit scalaire.
3) Montrer que la famille $(T_k)_{0\le k\le n}$ est une famille orthogonale.

Partie C : . On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire suivant
$$<P,Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)dt,$$
Pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, on pose :
$$\varphi(P)(X)=(X^2-X)P''(X)+(2X-1)P'(X)$$
$$s(P)(X)=P(1-X)$$

1) Montrer que φ, s définissent des endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
2) Donner leurs matrices dans la base canonique $\mathcal{B}=(1,X,\dots,X^n)$.
3) En déduire leurs valeurs propres, sont-ils bijectifs ? diagonalisables ?
4) Montrer que $\forall k\in[\![0,n]\!], \exists! L_k\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\deg(L_k)=k, co(L_k)=1, \varphi(L_k)=k(k+1)L_k$.
5) Montrer que $\forall(P,Q)\in\mathbb{R}_2[X]^n$ on a :
   $\left(\overrightarrow{\varphi(P)}|\overrightarrow{Q}\right)=\left(\overrightarrow{P}|\overrightarrow{\varphi(Q)}\right)$ et $\left(\overrightarrow{s(P)}|\overrightarrow{Q}\right)=\left(\overrightarrow{P}|\overrightarrow{s(Q)}\right)$.
6) En déduire que $(L_0,\dots,L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
7) En utilisant c. Dire pourquoi les matrices de φ, s dans $(L_0,\dots,L_n)$ sont symétriques, expliciter ensuite ces matrices.
8) Montrer que s est une réflexion, préciser par rapport quel hyperplan.

Problème 2

. Matrice de Gram.

Soient $\mathcal{C} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n, et Gram$(x_1, \dots, x_p)$ leur matrice de Gram de type $p \times p$, dont les coefficients sont $(\overrightarrow{x_i}|\overrightarrow{x_j})$. On pose $\Gamma(x_1, \dots, x_p) = \det(\mathbf{Gram}(x_1, \dots, x_p))$
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

1) a) **Comparer rg$A$ et rg$(x_1, \dots, x_p)$.**
   b) **Préciser le type de la matrice A, ainsi que ses coefficients.**
   c) **Montrer que ${}^tAA = Gram(x_1, \dots, x_p)$.**
   d) **Montrer que $\ker {}^tAA = \ker A$, en déduire que rg$(x_1, \dots, x_p) =$ rg $Gram(x_1, \dots, x_p)$.**
2) a) **Montrer que $\det G$ est inchangé si on remplace x_k par $x_k - \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$.**
   b) **Soit $F = \mathbf{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $x \in E$.**
   Montrer que $d(x, F)^2 = \dfrac{\Gamma(x_1, \dots, x_n, x)}{\Gamma(x_1, \dots, x_n)}$.
3) **On suppose dans cette question que $\mathcal{B}$ une fammile quelconque de E, vérifiant la relation suivante :**
$$\forall\ cx \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2$$
   a) **Démontrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.**
   b) **Démontrer que : $\forall\ x, y \in E,\ (x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)(y \mid e_i)$.**
   c) **On note G la matrice de Gram de $e_1, \dots, e_n$.**
   Démontrer que $G^2 = G$ et conclure.
4) **Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on suppose dans cette question que $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. Montrer que $\Gamma(u(e_1), \dots, u(e_n)) = (\det u)^2 \Gamma(e_1, \dots, e_n)$.**
5) **Soit $A \in matn, p\mathbb{R}$. Montrer que $\det({}^tAA) \geq 0$.**
6) **Soit un tétraèdre $ABCD$ tel que $AB = AC = AD = 1$ et $(AB, AC) \equiv \frac{\pi}{4}$, $(AB, AD) \equiv \frac{\pi}{3}$, $(AC, AD) \equiv \frac{\pi}{2}$. Calculer son volume.**
7) **Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases quelconques de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ $\mathcal{B}'$, et G, G' les matrices de Gram de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Quelle relation y a-t-il entre P, G et G' ?**
8) **Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E, G sa matrice de Gram et $G^{-1} = (a_{ij})$.**
   Montrer que : $\forall\ \vec{x} \in E,\ \sum_{i,j} a_{ij} (\vec{e}_i \mid \vec{x})(\vec{e}_j \mid \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$.
9) **Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base non orthonormée de E, G sa matrice de Gram $f \in \mathcal{L}(E)$ et M sa matrice dans $\mathcal{B}$.**
   a) **Montrer que f est auto-adjoint si et seulement si ${}^tMG = GM$.**
   b) **Montrer que f est orthogonal si et seulement si ${}^tMGM = G$.**

Fin