

Suites et Séries de fonctions

Devoir Maison N°1 : CCP 2023

PROBLÈME

Dans tout le problème, α est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. Démontrer que $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1[$ et sur $[1,+\infty[$.

Q10. Démontrer que $J(\alpha) = I(1-\alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q11. 1^{re} tentative

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $f_n(x) = (-1)^n x^{n+\alpha-1}$. Montrer que :

$$\forall x \in]0,1[, \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?

Q12. 2^e tentative

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1}.$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx.$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q13. En déduire que :

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \cos(nx)}{\alpha^2 - n^2} \right).$$

Q14. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

PROBLÈME

Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue et positive sur $]0, 1[$ ainsi que sur $[1, +\infty[$

En 0, on a $\varphi(t) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}} dx$ est intégrable car $1 - \alpha < 1$, donc par théorème des équivalents, la fonction φ est intégrable sur $]0, 1[$.

En $+\infty$, on a $\varphi(t) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^{2-\alpha}} dx$ est intégrable car $2 - \alpha > 1$, donc par théorème des équivalents, la fonction φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Q10. On a successivement :

$$I(1 - \alpha) = \int_0^1 \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx$$

on effectue le changement de variable $x = \frac{1}{u}$

$$\begin{aligned} I(1 - \alpha) &= \int_{+\infty}^1 \frac{u^\alpha}{1 + \frac{1}{u}} \left(-\frac{du}{u^2} \right) \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1} du \\ &= J(\alpha) \end{aligned}$$

Q11. Pour x fixé dans $]0, 1[$, $f_n(x)$ est le terme général d'une série géométrique et $|f_n(x)| < 1$, la série est donc convergente :

$$\text{On a donc } \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}$$

supposons que la série converge uniformément sur $]0, 1[$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = (-1)^n$

Le théorème de la double limite entraînerait que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ converge ce qui n'est pas le cas.

Donc la série ne converge pas uniformément sur $]0, 1[$.

Q12. Comme $S_n(x) = x^{\alpha-1} \sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} (1 - (-x)^{n+1})$.

On note $\varphi_n : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} (1 - (-x)^{n+1})$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \varphi_n(x)$ est continue sur $[0, 1]$.
- $\forall x \in]0, 1[$, $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ et φ est continue par morceau sur $]0, 1[$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0, 1[$, $|\varphi_n(x)| \leq \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \times 2$ et la fonction $x \mapsto 2 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0, 1[$ d'après la question 19.

Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) dx = I(\alpha)$$

$$\text{Comme } \int_0^1 S_n(x) dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{\alpha+k-1} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$$

On en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ que $I(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$

Q13. Avec la relation de Chasles, on a immédiatement $I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$.

par ailleurs :

$$\begin{aligned} I(\alpha) + J(\alpha) &= I(\alpha) + I(1-\alpha) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{-\alpha+1+k} \\ &\text{on effectue le changement d'indice dans la deuxième somme } p = k+1 \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{-\alpha+p} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{-\alpha+n} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-2\alpha)}{-\alpha^2 + n^2} \\ I(\alpha) + J(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \end{aligned}$$

Q14. En posant $x = 0$ dans l'expression que l'on admet, on obtient :

$$1 = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right)$$

On en déduit donc avec le résultat de la question précédente que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$