My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مموني مولاي اسماعيل

DM N° 2 : Espaces Préhilbertiens

Mines 2003

Première partie

Le but de cette première partie est d'établir des résultats qui seront utiles dans la seconde partie.

Étant donné un entier n strictement positif $(n \geq 1)$, soient S_n et I_n les deux réels définis par les relations ci-dessous :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i+j+1} \right) \quad ; \quad I_n = \int_0^n dx \int_0^n \frac{dy}{x+y+1}.$$

Intégrale I_n.
1. Calculer, pour toute valeur de l'entier strictement positif n, l'intégrale I_n.

2. Déterminer les constantes A, B, C et D figurant dans le développement limité de la fonction $n \longmapsto I_n$ à l'infini qui s'écrit sous la forme suivante :

$$I_n = A\ n + B\ \ln n + C + \frac{D}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Somme S_n :
3. Établir un encadrement du réel S_n à l'aide de I_n.

4. En déduire que la somme S_n est équivalente à l'infini à $2n\ \ln 2$.

Soit J_n l'intégrale suivante :

$$J_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)^2 \ dx.$$

Intégrale J_n :
5. Déterminer la relation qui lie l'intégrale J_n au réel S_n. En déduire, lorsque l'entier n croît indéfiniment, un équivalent de J_n à l'infini.

Seconde partie

Soit E un espace préhilbertien réel ; soit $(x,\ y) \longmapsto (x \mid y)$ le produit scalaire de cet espace. La norme d'un vecteur x de E, déduite de ce produit scalaire est notée $\|x\|$.

Étant donné un réel μ supérieur ou égal à 1 ($\mu \geq 1$), une suite de n vecteurs d'un espace euclidien E_n, de dimension finie n, $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ est dite μ-presque orthogonale (en abrégé μ-p.o.) si et seulement si :

i. les vecteurs $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ sont de norme unité,

ii. pour toute suite finie de n réels $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ la norme du vecteur $\sum_{i=1}^n a_i\ x_i$ vérifie la double inégalité suivante :

$$\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i\ x_i \right\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 .$$

Plus généralement : une suite dénombrable $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel est dite presque orthogonale (p. o.), si et seulement s'il existe un réel $\mu \geq 1$ tel que, pour tout entier n strictement positif, pour toute suite extraite $x_{k_1},\ x_{k_2},\ ...,\ x_{k_n}$ de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et pour toute suite finie de n réels $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$, la norme du vecteur $\sum_{i=1}^n a_i\ x_{k_i}$ vérifie la relation suivante :

$$\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i\ x_{k_i} \right\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 .$$

Remarque : la suite des indices $k_1,\ k_2,\ ...,\ k_n$ de la suite extraite $x_{k_1},\ x_{k_2},\ ...,\ x_{k_n}$, est une suite monotone strictement croissante $k_1 < k_2 < ... < k_n$.

Premières propriétés :

Soit E_n un espace euclidien de dimension n.

6. Démontrer que, pour qu'une suite de n vecteurs $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ soit une base orthonormée de E_n, il faut et il suffit qu'elle soit une suite 1-presque orthogonale.

7. Démontrer que, si une suite de n vecteurs $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ de E_n est μ-presque orthogonale, la suite est libre.

Un exemple :

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur le segment $[0,\ 1]$; le produit scalaire de deux fonctions f et g de E est défini par la relation suivante :

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(x)\ g(x)\ dx.$$

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions de E définies par la relation suivante :

$$P_n(x) = \sqrt{2n+1}\ x^n.$$

8. Démontrer que, bien que la suite des fonctions P_n de norme unité soit libre, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas presque orthogonale.

Soit $(V_1,\ V_2,\ ...,V_n)$ une suite libre de n vecteurs indépendants unitaires d'un espace euclidien E_n de dimension n. Soit M la matrice carrée d'ordre n dont les éléments $m_{i\ j}$ sont égaux aux produits scalaires des vecteurs V_i et V_j.

$$M = (m_{i\ j}) \quad ; \quad m_{i\ j} = (V_i \mid V_j)\,.$$

Étant donnée une suite de n réels $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$, soit A le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ et W le vecteur égal à la combinaison linéaire des vecteurs $V_1,\ V_2,\ ...,V_n$ avec les coefficients $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} \quad ; \quad W = \sum_{i=1}^{n} a_i\ V_i.$$

La suite de vecteurs $(V_1,\ V_2,\ ...,V_n)$ est μ-presque orthogonale :

9. Démontrer l'existence d'une matrice carrée P orthogonale et d'une matrice diagonale D dont tous les éléments de la diagonale sont différents de 0, telles que :

$$M = {}^tP.D.P.$$

10. Établir la relation qui lie la norme du vecteur W au réel ${}^tA.M.A$; ${}^tA$ désigne la matrice transposée de la matrice colonne A.

11. En déduire que les éléments de la matrice D sont strictement positifs, puis en déduire un encadrement de la norme du vecteur W à l'aide des valeurs propres de la matrice M et de la norme du vecteur B égal à l'image par la matrice P du vecteur A ($B = P.A$).

12. En déduire que la suite $(V_1,\ V_2,\ ...,V_n)$ est μ-presque orthogonale ; préciser des valeurs possibles pour le réel μ.

Soit maintenant $(V_n)_{n\geq 1}$ une suite dénombrable de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E.

Une condition suffisante :

13. Démontrer que, s'il existe un réel α, strictement supérieur à 3 ($\alpha > 3$), tel que le produit scalaire de deux vecteurs V_p et V_q soit majoré en valeur absolue par le réel $\alpha^{-|p-q|}$, c'est-à-dire :

$$|(V_p \mid V_q)| \leq \frac{1}{\alpha^{|p-q|}},$$

la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est presque orthogonale.

Deux questions préliminaires :

14. Soit f la fonction définie dans le quart de plan $[1,\infty[\times[1,\infty[$ par la relation suivante :

$$f(x,\ y)=\frac{\sqrt{2y+1}\sqrt{2xy+1}}{y+xy+1}.$$

Soit G la fonction, définie sur la demi-droite $[1,\infty[$, par la relation suivante :

$$G(x)=\lim_{y\longrightarrow\infty}f(x,\ y).$$

Étudier les variations des six fonctions définies sur la demi-droite fermée $[1,\infty[$ par les relations suivantes :

$$\begin{array}{lll} x & \longmapsto & f(x,\ 1)\ ;\quad y\longmapsto f(1,\ y)\ ;\ G\ :\ x\longmapsto \lim_{y\longrightarrow\infty}f(x,\ y)\ ; \\ y & \longmapsto & \lim_{x\longrightarrow\infty}f(x,\ y)\ ;\quad f_y:\ x\longmapsto f(x,\ y);\quad f_x:\ y\longmapsto f(x,\ y). \end{array}$$

15. Soit γ un réel strictement compris entre 0 et 1 $(0<\gamma<1)$. Démontrer l'existence d'une fonction φ_γ, définie sur la demi-droite fermée $[1,\infty[$, telle que, pour tout réel y de la demi-droite $[1,\infty[$, la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$f(\varphi_\gamma(y),\ y)=\gamma.$$

Démontrer l'existence d'un réel β tel que la fonction G, définie ci-dessus, prenne la valeur γ en ce point : $G(\beta)=\gamma$. Démontrer que ce réel β est strictement supérieur à 1 et est un minorant de l'image par φ_γ de la demi-droite fermée $[1,\infty[$.

Soit (P_{k_i}) une suite extraite de la suite des polynômes considérés à la question 8. L'application $i\longmapsto k_i$ est une suite strictement croissante. Pour simplifier les notations, soit Q_i le polynôme P_{k_i} :

$$Q_i=P_{k_i}.$$

Étude de la suite $(Q_i)_{i\geq 0}$:

16. On choisit une suite $(k_i)_{i\geq 0}$ telle que la suite $(Q_i)_{i\geq 0}$ soit presque orthogonale.

Démontrer que le réel μ entrant dans la définition de la presque orthogonalité est strictement supérieur à 1 $(\mu>1)$.

Démontrer qu'il existe un réel β, strictement supérieur à 1 $(\beta>1)$, tel que, pour tout indice i, les indices k_i et k_{i+1} soient liés par la relation suivante :

$$k_{i+1}\geq\beta\ k_i.$$

FIN DU PROBLÈME