Devoir Maison N°2 : Mines 2010

Dénombrements de certaines matrices binaires

Soit n un entier $\geqslant 2$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et n colonnes. On appelle *matrice binaire* de taille n une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1. L'élément d'une telle matrice situé sur la i-ième ligne et la j-ième colonne est dit en position (i, j), où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

On désigne par $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des matrices binaires de taille n comportant exactement deux 1 dans chaque ligne et exactement deux 1 dans chaque colonne. L'exemple suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de $\mathcal{U}_4$.

On note u_n le cardinal de $\mathcal{U}_n$, et on pose par convention $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

La partie D est indépendante des parties B et C.

A. Questions préliminaires

1) Exhiber toutes les matrices de $\mathcal{U}_n$ pour $n = 2$ et 3, et déterminer les valeurs correspondantes de u_n. (Dans le cas $n = 3$, on pourra raisonner sur la position des éléments nuls dans chacune de ces matrices.)

Soit X_0 le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

2) Si $A \in \mathcal{U}_n$, montrer que X_0 est un vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée ?

Soit $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{U}_n$ comportant un 1 en position (1,1). On note h_n le cardinal de $\mathcal{H}_n$.

3) Calculer la somme de toutes les matrices de $\mathcal{U}_n$ en fonction de h_n et de J.

B. Étude du cardinal de $\mathcal{U}_n$

4) Établir la relation $u_n = \frac{n}{2} h_n$ pour tout $n \geqslant 2$. (On pourra s'aider des deux questions précédentes.)

Soit $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_n$ comportant un 1 en position (1,2) et un 1 en position (2,1). On note k_n le cardinal de $\mathcal{K}_n$.

5) Pour tout $n \geqslant 2$, établir une relation donnant h_n en fonction de k_n et de $(n-1)^2$.

6) En examinant les possibilités pour le coefficient situé en position (2,2), démontrer la relation $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 4$.

On pose $w_n = \dfrac{u_n}{(n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) Déduire de ce qui précède une relation de récurrence pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis pour la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8) Prouver que $w_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la série de terme général w_n diverge. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$?

On pose $W(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$.

9) Donner une équation différentielle vérifiée par W et en déduire une expression de $W(x)$ en fonction de x.

C. Équivalent d'une suite de coefficients d'un développement en série entière

Cette partie permet d'obtenir un équivalent de u_n pour $n \to +\infty$. Soit α un réel et β un réel > 0. On considère la fonction ϕ définie pour $x \in]-1,1[$ par la formule :

$$\phi(x) = \frac{e^{\alpha x}}{(1-x)^\beta}.$$

On note $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ la fonction Gamma définie pour tout réel $t > 0$; on rappelle que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et que $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$ pour tout $t > 0$.

10) Montrer que $\phi(x)$ est la somme d'une série entière $\sum \phi_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$.

11) Montrer que si $x \in]-1,1[$, on peut écrire :

$$\frac{1}{(1-x)^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

où l'on exprimera les coefficients a_n en fonction de $n!$, $\Gamma(\beta)$ et $\Gamma(n+\beta)$.

12) En déduire que $\phi_n = \dfrac{\psi_n}{n!\,\Gamma(\beta)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où l'on a posé :

$$\psi_n = \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha+u)^n \,\mathrm{d}u.$$

13) On fixe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > |\alpha|$. A l'aide des variations de la fonction

$$u \mapsto e^{-u}(\alpha + u)^n$$

définie pour tout $u \geqslant -\alpha$, montrer que $\left|\int_0^a u^{\beta-1} e^{-u}(\alpha+u)^n \, \mathrm{d}u\right|$ est négligeable devant $\int_a^\infty u^{\beta-1} e^{-u}(\alpha+u)^n \, \mathrm{d}u$ quand $n \to +\infty$.

14) En déduire qu'il existe $a > |\alpha|$ tel que ψ_n soit équivalent à l'intégrale $\int_a^\infty e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1} \, \mathrm{d}u$ quand $n \to +\infty$.

15) En conclure que les suites ψ_n et $e^\alpha \Gamma(n+\beta)$ sont équivalentes.

On revient sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie au début du problème.

16) Établir un équivalent de ϕ_n, puis de u_n quand $n \to +\infty$. On prendra soin de simplifier l'équivalent trouvé de u_n en utilisant la formule de Stirling.

D. Étude de rang

Dans cette partie, on cherche à déterminer le rang r_n du système constitué des u_n matrices de $\mathscr{U}_n$, considérées comme des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que X_0 est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, et que J est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

17) Calculer r_n pour $n = 2$ et 3. (Dans le cas $n = 3$, on pourra considérer les matrices $J - A$, où $A \in \mathscr{U}_3$.)

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{V}_n$ des matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que X_0 soit à la fois un vecteur propre pour A et pour sa transposée ${}^tA$.

18) Montrer que $\mathscr{U}_n \subset \mathscr{V}_n$ et comparer les valeurs propres de A et de ${}^tA$ associées à X_0 lorsque $A \in \mathscr{V}_n$.

19) Déterminer la dimension de $\mathscr{V}_n$. (On pourra considérer une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dont un des vecteurs est colinéaire à X_0.) En déduire une majoration sur r_n.

Pour $n \geqslant 3$, soit A une matrice de $\mathscr{U}_n$ comportant des 1 en positions $(1,1)$ et $(2,2)$ et des 0 en positions $(1,2)$ et $(2,1)$.

20) Montrer qu'il existe une matrice B de $\mathscr{U}_n$ telle que $A - B$ ne comporte que des éléments nuls, *sauf* en positions (i,j) pour $i \leqslant 2$ et $j \leqslant 2$. En déduire que si r'_n désigne le rang du système constitué de toutes les matrices $U - V$ où $U, V \in \mathscr{U}_n$, on a $r'_n \geqslant (n-1)^2$.

21) Conclure.

FIN DU PROBLÈME

Mines-Ponts 2010. Option MP. Mathématiques II.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

A. Questions préliminaires.

1) $\mathcal{U}_2$ est évidemment réduit à la matrice J_2 donc $u_2 = 1$.
Une matrice M de $\mathcal{U}_3$ est caractérisée par la position de l'unique zéro sur chaque ligne qui doit avoir une position différente à chaque fois de manière à ce que chaque colonne contienne également deux 1. Donc $u_3 = 3! = 6$ $\square$

2) Il vient immédiatement $AX_0 = 2X_0$ $\square$

3) Soit $\mathcal{H}_{i,j}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{U}_n$ comportant un 1 en position (i,j) avec (i,j) fixé. L'application qui consiste à échanger les lignes 1 et i ainsi que les colonnes 1 et j d'un élément de $\mathcal{U}_n$ est clairement une bijection de $\mathcal{H}_n$ sur $\mathcal{H}_{i,j}$. Donc card $\mathcal{H}_{i,j} = h_n$
Il en découle que $\sum\limits_{U\in\mathcal{U}_n} U = h_n J$. $\square$

B. Étude du cardinal de $\mathcal{U}_n$

4) Notons $S = \sum\limits_{U\in\mathcal{U}_n} U$. D'après la question 2) nous avons $SX_0 = 2u_nX_0$.
Par ailleurs $S = h_nJ$ donc $SX_0 = nh_nX_0$ car $JX_0 = nX_0$
Ainsi $2u_nX_0 = nh_nX_0$ et comme X_0 est non nul on a $u_n = \dfrac{nh_n}{2}$ pour $n \geqslant 2$ $\square$

5) Fixons (i,j) avec $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$ et notons $\mathcal{K}_{i,j}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_n$ ayant un 1 en position $(1,j)$ et $(i,1)$. Alors l'application qui consiste à échanger les colonnes 2 et j et les lignes 2 et i est clairement une bijection de $\mathcal{K}_n$ sur $\mathcal{K}_{i,j}$.
Tous ces ensembles ont donc même cardinal k_n, sont au nombre de $(n-1)^2$ et forment une partition de $\mathcal{H}_n$. En effet leur réunion est évidemment $\mathcal{H}_n$ et ils sont deux à deux disjoints : s'il existait un éléments dans l'intersection de $\mathcal{K}_{i,j}$ et $\mathcal{K}_{i',j'}$ avec $i \neq i'$ par exemple, cet élément aurait trois 1 sur la première colonne ce qui est exclu.
Il en résulte que $h_n = (n-1)^2k_n$ pour $n \geqslant 2$. $\square$

6) $\mathcal{K}_n$ est la réunion disjointe des sous-ensembles $\mathcal{K}_{n,0}$ et $\mathcal{K}_{n,1}$ constitués des éléments dont le terme en position $(2,2)$ vaut respectivement 0 ou 1.
Or pour $n \geqslant 4$, $\mathcal{K}_{n,1}$ est en bijection avec $\mathcal{U}_{n-2}$ par l'application qui à un élément de $\mathcal{K}_{n,1}$ associe la sous-matrice constituée des $(n-2)$ dernières lignes et colonnes.
Par ailleurs l'application qui à un élément de $\mathcal{K}_{n,0}$ associe la sous-matrice constituée des $(n-1)$ dernières lignes et colonnes dont on remplace l'élément 0 en position $(1,1)$ par un 1 est une bijection sur $\mathcal{H}_{n-1}$
Il en découle que $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$ pour $n \geqslant 4$. $\square$

Remarque : cette relation est encore vraie pour $n = 3$. En effet on constate facilement que $\mathcal{K}_{3,0}$ a un seul élément et que $\mathcal{K}_{3,1}$ est vide. Donc $k_3 = 1$ et on a bien $k_3 = u_1 + h_2$ puisque $u_1 = 0$ par convention et que $h_2 = 1$ clairement. Elle est également vraie pour $n = 2$ puisque $k_2 = 1$ clairement, que $u_0 = 1$ par convention et que $h_1 = 0$.

En conclusion $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$. $\square$

7) Il vient alors facilement à l'aide des trois questions précédentes que :
$u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}\Big(2u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}\Big)$ pour $n \geqslant 2$ $\square$
D'où l'on tire immédiatement que :
$w_n = \dfrac{1}{n}\Big((n-1)w_{n-1} + \dfrac{1}{2}w_{n-2}\Big)$ pour $n \geqslant 2$ (1). $\square$

8) On prouve que $w_n \in [0,1]$ par récurrence. Le prédicat est satisfait pour $n = 0$ et $n = 1$ et en supposant qu'il est vrai jusqu'à $n-1$ avec $n \geqslant 2$, il vient $0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{n}\Big((n-1) + \dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{1}{n}(n - \dfrac{1}{2}) < 1$ $\square$

Comme $w_{n-2} \geqslant 0$ on a $w_n \geqslant \dfrac{n-1}{n}w_{n-1}$ donc par itération $w_n \geqslant \dfrac{2}{n}w_2 = \dfrac{1}{2n}$ pour $n \geqslant 2$. Donc $\sum w_n$ diverge. $\square$

Comme $\sum w_n$ diverge, le rayon de convergence R de $\sum w_nx^n$ est inférieur ou égal à1.
Par ailleurs puisque $|w_n| \leqslant 1$ la série $\sum w_nx^n$ converge (absolument) pour $x \in]-1,1[$ car $|w_nx^n| \leqslant |x|^n$. Donc $R \geqslant 1$.
En conclusion $R = 1$. $\square$

9) Par théorème de dérivation terme à terme d'une séries entière dans l'intrevellle ouvert de convergence il vient pour $x \in]-1,1[$ en tenant compte de la relation (1):

$W'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)w_{n+1}x^n = w_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(nw_n + \frac{1}{2}w_{n-1}\big)x^n.$

Or $w_1 = 0$ et les deux séries $\sum nw_nx^n$ et $\sum w_{n-1}x^n$ convergent donc $W'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nw_nx^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n-1}x^n$

soit $W'(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} nw_nx^{n-1} + \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} w_nx^n = xW'(x) + \frac{x}{2}W(x)$.

Ainsi w est solution sur $]-1,1[$ de l'équation $2(1-x)y' - xy = 0$. □

Il en découle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $W(x) = \lambda\frac{e^{-x/2}}{\sqrt{1-x}}$ et comme $W(0) = w_0 = 1$ il vient $W(x) = \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{1-x}}$ □

C. Équivalent d'une suite de coefficients d'un développement en série entière.

10) $x \longmapsto e^{\alpha x}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori sur $]-1,1[$.
$x \longmapsto (1-x)^{-\beta}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.
Donc, par produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes, Φ est développable sur $]-1,1[$. □

11) Pour $x \in]1,1[$ on sait que $(1-x)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ avec $a_n = \frac{(-\beta)(-\beta-1)\ldots(-\beta-n+1)}{n!}$ soit encore

$n!a_n = (-1)^n(n+\beta-1)(n+\beta-2)\ldots(\beta+1)\beta = (1)^n\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)}$. Ainsi $a_n = \frac{\Gamma(n+\beta)}{n!\Gamma(\beta)}$. □

12) Comme $e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n!}x^n$ il vient par produit de Cauchy $\Phi_n = \sum_{p+q=n}\frac{\alpha^p}{p!} \times \frac{\Gamma(q+\beta)}{q!\Gamma(\beta)}$ soit

$\Phi_n = \frac{1}{n!\Gamma(\beta)}\sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p\,\alpha^p\Gamma(n-p+\beta)$

Donc $n!\Gamma(\beta)\Phi_n = \int_0^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{n}\mathrm{C}_n^p\,\alpha^pe^{-u}u^{\beta-1+n-p}\Big)\,\mathrm{d}\,u = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\beta-1}\Big(\sum_{p=0}^{n}\mathrm{C}_n^p\,\alpha^pu^{n-p}\Big)\,\mathrm{d}\,u$

Ainsi $n!\Gamma(\beta)\Phi_n = \int_0^{+\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}\,u$. □

13) • Soit $I_1(n) \underset{\text{DEF}}{=} \int_0^a u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}\,u$. Alors $|I_1(n)| \leqslant \int_0^a u^{\beta-1}e^{-u}(|\alpha|+u)^n\,\mathrm{d}\,u$

Or les variations (immédiates) de $u \longmapsto e^{-u}(|\alpha|+u)^n$ montrent que cette fonction croît sur $[0, n-|\alpha|]$ (donc sur $[0,a]$ pour $n \geqslant a+|\alpha|$) puis décroît. Notons au passage qu'il faut plutôt considérer cette fonction que celle indiquée par l'énoncé qui ne croît pas sur $[0,a]$ pour $\alpha < 0$ et n pair (elle commence alors par décroître).

Ainsi pour $n \geqslant a+|\alpha|$: $|I_1(n)| \leqslant e^{-a}(|\alpha|+a)^n\int_0^a u^{\beta-1}\,\mathrm{d}\,u = K_1C^n \quad (1)$

avec $C = a+|\alpha|$ et $K_1 = e^{-a}\int_0^a u^{\beta-1}\,\mathrm{d}\,u$ (qui converge bien car $\beta > 0$).

• Comme $a > |\alpha|$, $u \longmapsto u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n$ est positive sur $[a,+\infty[$ pour tout entier n donc

$I_2(n) \underset{\text{DEF}}{=} \int_a^{+\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}\,u \geqslant \int_{a+2|\alpha|+1}^{+\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}\,u$

Or pour $u \geqslant a+2|\alpha|+1$ on a $\alpha+u \geqslant a+|\alpha|+1 = C+1$ donc $I_2(n) \geqslant K_2(C+1)^n \quad (2)$

avec $K_2 = \int_{a+2|\alpha|+1}^{+\infty} u^{\beta-1}e^{-u}\,\mathrm{d}\,u$ (qui converge bien).

• De (1) et (2) on tire immédiatement que $I_1(n) = o(I_2(n))$ dès que $a > |\alpha|$. □

14) Comme $\Psi_n - I_2(n) = I_1(n)$ est négligeable devant $I_2(n)$, nous avons $\psi_n \sim I_2(n)$.

Notons $I_3(n) = \int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}\,u$. Il vient :

$I_3(n) - I_2(n) = \int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}f(u)\,\mathrm{d}\,u$ avec $f(u) = 1 - \Big(\frac{u}{\alpha+u}\Big)^{\beta-1} \quad (3)$

Or $f(u) = g(1) - g(\frac{u}{u+\alpha})$ avec $g(x) = x^{\beta-1}$

Par ailleurs $u \longmapsto \frac{u}{\alpha+u}$ est monotone (du signe de α) sur $[a,+\infty[$ de sorte que, pour tout $u \geqslant a$, le réel $\frac{u}{u+\alpha}$ appartient au segment $J = \big[\frac{a}{\alpha+a}, 1\big]$ si $\alpha \geqslant 0$ et à $J = \big[1, \frac{a}{\alpha+a}\big]$ si $\alpha < 0$.

Comme ce segment est dans les 2 cas inclus dans $]0,+\infty[$, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et donc en notant $M = \operatorname{Sup}_{x\in J}|g'(x)|$

on a $|f(u| \leqslant M \times \Big|1 - \frac{u}{\alpha+u}\Big| = \frac{M|\alpha|}{\alpha+u}$

De (3) ci-dessus on tire alors $|I_3(n) - I_2(n)| \leqslant M|\alpha| \displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-2}\,\mathrm{d}\,u = M|\alpha| \times I_3(n-1)$

Pour conclure, c'est à dire prouver que $I_2(n) \sim I_3(n)$, il suffit d'établir que $I_3(n-1)$ est négligeable devant $I_3(n)$. Or une intégration par parties sur $[a, X]$ suivie d'un passage à la limite pour $X \to +\infty$ fournit immédiatement $0 \leqslant I_3(n-1) = \dfrac{1}{n+\beta-1}\Big(I_3(n) - e^{-a}(\alpha+a)^{n+\beta-1}\Big) \leqslant \dfrac{I_3(n)}{n-\beta-1}$ d'où la conclusion.

Ainsi on a $\Psi_n \sim \displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}\,u$ dès lors que $a > |\alpha|$. □

15) Le changement de variable $u \longmapsto t = u + \alpha$ affine donc admisible montre que

$$\int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}\,u = e^{\alpha}\int_{\alpha+a}^{+\infty} e^{-t}t^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}\,t = e^{\alpha}\big(\Gamma(n+\beta) - x_n\big) \text{ avec } x_n = \int_0^{\alpha+a} e^{-t}t^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}\,t$$

Or $0 \leqslant x_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\alpha+a} t^{n+\beta-1} = \dfrac{(\alpha+a)^{n+\beta}}{n+\beta}$

et comme Γ est croissante sur $[2, +\infty[$ et que $\beta > 0$ on a (pour $n \geqslant 2$) $\Gamma(n+\beta) \geqslant \Gamma(n) = (n-1)!$

Cela prouve que x_n est négligeable devant $\Gamma(n+\beta)$ donc que $\psi_n \sim e^{\alpha}\Gamma(n+\beta)$ □

16) $\Gamma(n+\beta) = (n-1+\beta)(n-2+\beta)\dots(1+\beta)\beta \times \Gamma(\beta)$ donc (question 12) $\varphi_n \sim e^{\alpha}\dfrac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!}$.

En particulier avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{1}{2}$ qui est bien positif, il vient :

$$u_n = (n!)^2 w_n \sim (n!)^2 \times \frac{1}{\sqrt{e}}.\frac{(1/2)(1/2+1)\dots(1/2+n-1)}{n!} = \frac{n!}{\sqrt{e}} \times \frac{1 \times 3 \times \dots (2n-1)}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{(2n)!}{2^{2n}}$$

Or par la formule de Stirling, $(2n)! \sim \sqrt{2\pi}\dfrac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{e^{2n}}$ d'où finalement $u_n \sim 2\sqrt{\pi}\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^{2n+\frac{1}{2}}$ □

D. Étude de rang.

17) On a évidemment $r_2 = 1$ puisque $\mathcal{U}_2$ a un seul élément (non nul).

$\mathcal{U}_3$ est constitué de 6 éléments A_i et on a $\sum\limits_{i=1}^{6} A_i = 4J$ d'après la partie A. Ainsi $J \in F \underset{\text{DEF}}{=} \mathrm{vect}(A_i)$ donc on a aussi $F = \mathrm{vect}(J - A_i)$. Notons $B_i = J - A_i$.

Les 4 matrices B (notées B_i pour i de 1 à4) ayant un 0 en position $(0,0)$ sont telles que les 4 sous-matrice B'_i obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne forment la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc elles forment un système libre.

En leur adjoignant I_3 (notée B_5) qui a un 1 en position $(0,0)$ on a encore évidemment un système libre car $\sum\limits_{i=1}^{5} \lambda_i B_i = 0$ implique $\lambda_5 = 0$ (par considération de l'élément en position $(0,0)$). Donc $r_3 \geqslant 5$.

Quitte à permuter les 4 premiers indices, on constate immédiatement que $B'_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B'_5 - B'_1 + B'_2 + B'_3 - B'_4$ et on remarque que cette relation est encore vraie avec les matrices B_i correspondantes : $B_6 = B_5 - B_1 + B_2 + B_3 - B_4$ donc $r_3 < 6$.

En conclusion $r_3 = 5$. □

18) $\mathcal{U}_n$ est stable par transposition donc $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{V}_n$ par la question 2. □

Soit $A \in \mathcal{V}_n$ et λ et μ les valeurs propres respectives de A et ${}^tA$ associées au vecteur propre X_0.

On a donc $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = \lambda$ pour tout i et $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} = \mu$ pour tout j.

En remarquant que $\sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}\Big)$ par le théorème de Fubini de sommation discrète sur un rectangle, on obtient $\lambda = \mu$. □

19) Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ avec $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{n}}X_0$ et notons P la matrice de passage (orthogonale) de la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ à cette base.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $A' = P^{-1}AP = {}^tPAP$ et on note λ un réel quelconque.

Alors $AX_0 = \lambda X_0$ si et seulement si $A'\varepsilon_1 = \lambda\varepsilon_1$ (puisque A et A' repèrent le même endomorphismes dans les bases respectives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$) soit si et seulement tous les éléments de la première colonne de A' sont nuls sauf éventuellement le premier qui vaut λ.

Or on a également ${}^tA' = {}^tP^tAP$ de sorte que de même ${}^tAX_0 = \lambda X_0$ si et seulement si ${}^tA'\varepsilon_1 = \lambda\varepsilon_1$ soit si et seulement tous les éléments de la première ligne de A sont nuls sauf éventuellement le premier qui vaut λ.

Ainsi $A \in \mathcal{V}_n$ si et seulement si tous les éléments de la première colonne et de la première ligne de $A' = {}^tPAP$ sont nuls sauf éventuellement le premier et les autres éléments quelconques.
Ces matrices A' forment un sous-espace de dimension $(n-1)^2+1$ et comme l'application $M \longmapsto PM^tP$ est un isomorphisme de cet espace sur $\mathcal{V}_n$ on a $\dim \mathcal{V}_n = (n-1)^2+1$. $\square$

Comme $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{V}_n$ on a naturellement $r_n \leqslant (n-1)^2+1$. $\square$

Remarque : pour $n=2$ on a $r_2 = 1$ et $1 \leqslant (2-1)^2+1 = 2$ et pour $n=3$ on a $r_3 = 5$ et $5 \leqslant (3-1)^2+1 = 5$.

20) Soit B la matrice définie par $b_{i,j} = 1 - a_{i,j}$ si $i \leqslant 2$ et $j \leqslant 2$ et par $b_{i,j} = a_{i,j}$ sinon.
Cette matrice est bien sûr binaire et est obtenue à patir de A en modifiant le bloc 2×2 haut-gauche : on remplace $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par son "complémenté" $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Comme les autres éléments sont inchangés et que $A \in \mathcal{U}_n$ on a clairement $B \in \mathcal{U}_n$ également.
En outre tous les éléments de $A - B$ sont bien nuls sauf le bloc 2×2 haut-gauche qui vaut $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\square$

Notons $A_{i,j}$ pour $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$ la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes 2 et i et les colonnes 2 et j. C'est encore un élément de $\mathcal{U}_n$ clairement de même que la matrice $B_{i,j}$ obtenue à partir de B par la même opération. La matrice $D_{i,j} = A_{i,j} - B_{i,j}$ a tous ses éléments nuls sauf $d_{1,1} = d_{i,j} = 1$ et $d_{1,j} = d_{i,1} = -1$.
Or ces matrices $D_{i,j}$ forment un système libre car $\sum\limits_{i,j \geqslant 2} \lambda_{i,j} D_{i,j}$ est une matrice dont l'élément situé en position (i_0, j_0) avec $i_0 \geqslant 2$ et $j_0 \geqslant 2$ est λ_{i_0,j_0} puisque le terme en position (i_0,j_0) de $D_{i,j}$ est nul sauf pour $(i,j) = (i_0,j_0)$ auquel cas il vaut 1.

Il en découle que $r'_n \geqslant (n-1)^2$ pour $n \geqslant 3$. $\square$

21) On a naturellement $F_n \underset{\text{DEF}}{=} \text{vect}\{U - V\}_{U,V \in \mathcal{U}_n} \subset \mathcal{U}_n$ donc $(n-1)^2 \leqslant r_n \leqslant (n-1)^2+1$ pour $n \geqslant 3$.
Mais en outre l'inclusion précédente est stricte. En effet vu que $UX_0 = 2X_0$ pour tout élément $U \in \mathcal{U}_n$, on a $MX_0 = 0$ pour tout $M \in F_n$. Ainsi si U est un élément quelconque de $\mathcal{U}_n$ alors U n'appartinet pas à F_n.

En conclusion $r_n = (n-1)^2+1$ pour $n \geqslant 3$ $\square$

Remarque : La restriction $n \geqslant 3$ est bien nécessaire vu la remarque finale à la question 19).

FIN