My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مُوني مُولَاي اسماعِيل

RÉSEAU CPGE IBNGHAZI

MP* 1 (Rabat)
Groupe 2

Devoir Maison n°2

Séries numériques

Mines 2022

Formule asymptotique de Hardy et Ramanujan

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie **B**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie **B** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$, de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$. L'étude de P au voisinage de 1 permet alors, dans les parties suivantes, de progresser vers l'obtention d'un équivalent simple de la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (formule asymptotique de Hardy et Ramanujan).

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ sera noté

$$D = \{z \in \mathbf{C} :\ |z| < 1\}.$$

Dans tout l'énoncé, on utilisera la dénomination « variable aléatoire réelle » pour signifier « variable aléatoire discrète réelle ».

On admettra aussi les deux identités classiques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \sqrt{2\pi}.$$

A. Fonctions L et P

1 ▷ Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}\cdot$ Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in \,]-1, 1[$. On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\cdot$$

2 ▷ Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $t \in [0, 1] \mapsto L(tz)$ est dérivable et donner une expression simple de sa dérivée. En déduire que $t \mapsto (1 - tz)\, e^{L(tz)}$ est constante sur $[0, 1]$ et conclure que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}\cdot$$

3 ▷ Montrer que $|L(z)| \leq -\ln(1 - |z|)$ pour tout z dans D. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} L(z^n)$ pour tout z dans D. Dans la suite, on notera, pour z dans D,

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right].$$

On remarque, en vertu de la question précédente et des propriétés de l'exponentielle, que

$$\forall z \in D,\ P(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}\cdot$$

B. Développement de P en série entière

Pour $(n, N) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbf{N}^N$ telles que $\sum\limits_{k=1}^{N} k a_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

4 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est fini pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, que la suite $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N \geq 1}$.

5 ▷ Montrer par récurrence que

$$\forall N \in \mathbf{N}^*,\ \forall z \in D,\ \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

6 ▷ Soit $z \in D$. On convient que $p_{n,0} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En examinant la sommabilité de la famille $((p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n)_{(n,N) \in \mathbf{N}^2}$, démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_n p_n x^n$.

7 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\, P(e^{-t+i\theta})\, \mathrm{d}\theta,$$

si bien que

$$p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\, \frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})}\, \mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'obtenir un équivalent du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Cet équivalent sera obtenu via un choix approprié de t en fonction de n dans la formule (1).

C. Contrôle de P

8 ▷ Soit $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leq \exp\Big(-(1-\cos\theta)\,x\Big).$$

En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout réel θ,

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big)\right).$$

9 ▷ Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big) \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\Big((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta)\Big)}.$$

En déduire que

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou que} \quad \left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

D. Intermède : quelques estimations de sommes

On fixe dans cette partie un réel $\alpha > 0$ et un entier $n \geq 1$. Sous réserve d'existence, on pose

$$S_{n,\alpha}(t) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}.$$

On introduit aussi la fonction

$$\varphi_{n,\alpha} : x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n},$$

qui est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$.

10 ▷ Montrer que $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi'_{n,\alpha}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$.

11 ▷ Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'existence de $S_{n,\alpha}(t)$, sa positivité stricte, et l'identité

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = t^{n+1} S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\,\varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire que

$$S_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\,\mathrm{d}x + O\Big(\frac{1}{t^n}\Big) \quad \text{quand } t \to 0^+.$$

12 ▷ Démontrer, sans utiliser ce qui précède, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dans le reste du problème, nous admettrons le résultat suivant (il peut être démontré par une méthode similaire) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}.$$

CONCOURS MINES-PONTS

EPREUVE MATHEMATIQUES I - MP

Durée : 3 heures

Théorème de Hardy-Ramanujan

Corrigé : Jean Nougayrède - Rémi Souveton

Avertissement : il peut se glisser ici ou là une coquille. Merci de ne pas en tenir rigueur aux auteurs !

A. Fonctions L et P

1 $\triangleright$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{|z|^n}{n} \leq |z|^n$ et $\sum |z|^n$ est une série géométrique convergente (puisque $|z| < 1$).
Par comparaison, $\sum \frac{z^n}{n}$ est une série absolument convergente, donc convergente.
D'après le cours sur les séries entières, on a :

$$\forall z \in \left]-1,1\right[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z).$$

2 $\triangleright$ Tout d'abord, pour $t \in [0,1]$, on a $tz \in D$ et :

$$\underbrace{L(tz)}_{=\varphi(t)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} t^n.$$

Par une conséquence directe de la règle de d'Alembert, cette série entière de la variable réelle t est de rayon de convergence $\frac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$ et $+\infty$ si $z = 0$.
Dans tous les cas, le rayon de convergence est strictement supérieur à 1.
Par théorème, sa somme est dérivable (au moins) sur l'intervalle ouvert de convergence, qui contient $[0,1]$ et :

$$\forall t \in [0,1], \varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1} = \frac{z}{1-zt}.$$

Comme produit de fonctions dérivables sur $[0,1]$, la fonction $\psi : t \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$ est dérivable et :

$$\forall t \in [0,1], \psi'(t) = \Big((1-tz)\frac{z}{1-zt} - z\Big)e^{L(tz)} = 0.$$

Comme $[0,1]$ est un intervalle, on peut conclure : ψ est une fonction constante et, en particulier, $\psi(1) = \psi(0)$, qui se réécrit :

$$(1-z)e^{L(z)} = e^{L(0)} \quad \text{donc} \quad e^{L(z)} = \frac{1}{1-z}.$$

3 $\triangleright$ Soit $z \in D$. Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$|L(z)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} \underset{|z| \in [0,1[}{=} -\ln(1-|z|).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $z^n \in D$, donc $|L(z^n)| \leq \underbrace{-\ln(1-|z|^n)}_{=a_n}$.
Comme $|z| < 1$, la suite (z^n) converge vers 0, puis $a_n \sim |z|^n$.
On en déduit $L(z^n) = O(z^n)$ puis, par comparaison à une série géométrique, la série $\sum L(z^n)$ est absolument convergente, donc convergente.

B. Développement de P en série entière

4 $\triangleright$

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, \ldots, a_N) \in P_{n,N}$.

  Par positivité des a_k, on a $0 \leq a_i \leq ia_i \leq n$ pour tout $i \in [\![1, N]\!]$.

  On en déduit l'inclusion $P_{n,N} \subset [\![0, n]\!]^N$, puis le caractère fini de l'ensemble $P_{n,N}$ comme partie d'un ensemble fini.

- Notons $f : (a_1, \ldots, a_N) \mapsto (a_1, \ldots, a_N, 0)$.

  Par définition des ensembles $P_{n,N}$ et $P_{n,N+1}$, l'application f est bien définie de $P_{n,N}$ vers $P_{n,N+1}$ et également injective par vérification immédiate.

  On en déduit $p_{n,N} \leq p_{n,N+1}$, ce qui montre que la suite $(p_{n,N})_{N\geq 1}$ est croissante.

- Dans le cas où $n = 0$, on a évidemment $P_{0,N} = \{(0, \ldots, 0)\}$ donc $p_{0,N} = 1$ pour tout $N \geq 1$ et donc la suite $(p_{n,N})_{N\geq 1}$ est constante à partir du rang $1 = \max(n, 1)$.

  Supposons $n \geq 1$. Soit $N \geq n$.

  Soit $(a_1, \ldots, a_{N+1}) \in P_{n,N+1}$. Si $a_{N+1} \geq 1$, alors $(N + 1)a_{N+1} \geq (N + 1)$ donc :

  $$n = \sum_{k=1}^{N+1} ka_k \geq (N + 1)a_{N+1} \geq N + 1 > n,$$

  ce qui est absurde.

  Ainsi, $(a_1, \ldots, a_{N+1}) = (a_1, \ldots, a_N, 0)$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} ka_k = n$ puis $(a_1, \ldots, a_N) \in P_{n,N}$.

  Ceci montre que la fonction f du premier point est aussi surjective donc bijective.

  On en déduit $p_{n,N} = p_{n,N+1}$.

  En conclusion, la suite $(p_{n,N})_{N\geq 1}$ est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

5 $\triangleright$ Soit $z \in D$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété H_n par :

$$\underbrace{\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - z^k}}_{=\Pi_N} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

Initialisation. On a évidemment $P_{n,1} = \{(n)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z},$$

ce qui achève de montrer l'initialisation.

Hérédité. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_N.

Tout d'abord, par conséquence de la question précédente (premier point), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{n,N}|z|^n \leq (n + 1)^N |z|^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad \text{(croissance comparée)}$$

ce qui montre la sommabilité de la famille $(p_{n,N} z^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par ailleurs, la famille $(z^{i(N+1)})_{i\in\mathbb{N}}$ est également sommable (puisque $|z| < 1$).

Ainsi, la famille $\left(p_{n,N} z^{n+i(N+1)}\right)_{(n,i)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et :

$$\begin{aligned}
\Pi_{N+1} &= P_N \times \frac{1}{1-z^{N+1}} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} p_{n,N} z^n \sum_{i\in\mathbb{N}} z^{i(N+1)} && \text{(hypothèse de récurrence et série géométrique)} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \Bigg(\sum_{\substack{(n,i)\in\mathbb{N}^2 \\ n+(N+1)i=j}} p_{n,N} \Bigg) z^j && \text{(sommabilité)} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} p_{j,N+1} z^j,
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de l'hérédité.

Détaillons un peu la dernière égalité. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
p_{j,N+1} &= \operatorname{card}\big\{(a_1,\dots,a_{N+1}) \in \mathbb{N}^{N+1}, a_1 + \cdots + (N+1)a_{N+1} = j\big\} \\
&= \sum_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ (N+1)i\le j}} \operatorname{card}\big\{(a_1,\dots,a_N) \in \mathbb{N}^N, a_1 + \cdots + N a_N = j-(N+1)i\big\} \\
&= \sum_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ (N+1)i\le j}} p_{j-(N+1)i,N} = \sum_{\substack{(n,i)\in\mathbb{N}^2 \\ n+(N+1)i=j}} p_{n,N}.
\end{aligned}$$

6 $\triangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de la suite $(p_{n,N})_{N\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\sum_{(n,N)\in\mathbb{N}^2} \big|p_{n,N+1} - p_{n,N}\big||z|^n = \sum_{(n,N)\in\mathbb{N}^2} \big(p_{n,N+1} - p_{n,N}\big)|z|^n.$$

Le calcul (formel) qui suit, en remplaçant z par $|z|$ (toujours élément de D), montrera donc la sommabilité de la famille $\big((p_{n,N+1} - p_{n,N})z^n\big)_{(n,N)\in\mathbb{N}^2}$ et justifiera le résultat final.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n z^n &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{N\in\mathbb{N}} (p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n && (p_n = \lim_{N\to+\infty} p_{n,N} \ \text{ et } p_{n,0} = 0) \\
&= \sum_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} (p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n \\
&= \sum_{N\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} p_{n,N+1} z^n - \sum_{n\in\mathbb{N}} p_{n,N} z^n \Big) && \text{(les deux séries convergent)} \\
&= \sum_{N\in\mathbb{N}^*} (\Pi_{N+1} - \Pi_N) + \Pi_1 - 0 && \text{(question précédente)} \\
&= P(z). && (\lim_{N\to+\infty} \Pi_N = P(z))
\end{aligned}$$

Comme $P(|z|) < +\infty$, la sommabilité et donc le résultat du calcul précédent sont justifiés.
La série $\sum p_n z^n$ est convergente pour tout $z \in D$ donc son rayon de convergence R est supérieur ou égal à 1.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_{n,1} = 1$ donc $p_n \geq 1$, ce qui montre que $R \leq 1$.
En conclusion, $R = 1$.

7 $\triangleright$ Soit $t > 0$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $e^{-t+i\theta} \in D$ donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{e^{-in\theta} P(e^{-t+i\theta})}_{=f(\theta)} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{p_k e^{-kt} e^{i(k-n)\theta}}_{=f_k(\theta)} d\theta$$

Chaque fonction f_k est intégrable sur $[-\pi, \pi]$, la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $[-\pi, \pi]$ vers la fonction continue f et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f_k(\theta)| d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} 2\pi p_k (e^{-t})^k < +\infty \quad \text{car} \quad |e^{-t}| < 1.$$

Par théorème d'intégration terme à terme, on a donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P(e^{-t+i\theta}) d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{-kt} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta}_{=2\pi\delta_{k,n}} = 2\pi p_n e^{-nt},$$

ce qui conclut.

C. Contrôle de P

8 $\triangleright$ Toutes les séries qui suivent sont convergentes (par comparaison à la série géométrique $\sum x^n$). Partant de l'inégalité :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n}}_{\geq 0} \underbrace{(\cos(n\theta) - 1)}_{\leq 0} \leq 0,$$

on en déduit :

$$\ln(1-x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \cos(n\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} (\cos(n\theta) - 1) \leq x(\cos\theta - 1),$$

puis :

$$\ln(1-x) + \operatorname{Re} L(xe^{i\theta}) \leq x(\cos\theta - 1).$$

Par croissance de l'exponentielle, il vient :

$$(1-x)\exp\left(\operatorname{Re} L(xe^{i\theta})\right) \leq \exp(x(\cos\theta - 1)) \quad \text{puis} \quad (1-x)\left|\exp L(xe^{i\theta})\right| \leq \exp(-(1-\cos\theta)x).$$

D'après la question 2, on a alors :

$$(1-x)\frac{1}{|1 - xe^{i\theta}|} \leq \exp(-(1-\cos\theta)x),$$

ce qui conclut cette première partie de la question puisque $1 - x \geq 0$.
Ensuite, on a :

$$P(xe^{i\theta}) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - x^k e^{ik\theta}} \quad \text{et} \quad P(x) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - x^k}.$$

Par quotient et passage au module, il vient :

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left| \frac{1 - x^k}{1 - x^k e^{ik\theta}} \right|.$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $x^k \in [0, 1[$ et $k\theta \in \mathbb{R}$, on peut utiliser la première partie de la question :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{1 - x^k}{1 - x^k e^{ik\theta}} \right| \leq \exp(-(1 - \cos(k\theta))x^k).$$

Par produit d'inégalités dont les termes sont positifs et passage à la limite, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \lim_{N\to+\infty}\prod_{k=1}^{N}\exp\big(-(1-\cos(k\theta))x^k\big) &= \exp\sum_{k=0}^{+\infty}\underbrace{-(1-\cos k\theta)x^k}_{=0 \text{ si } k=0}\\ &= \exp\Big(-\frac{1}{1-x}+\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{+\infty}e^{ik\theta}x^k\Big)\\ &= \exp\Big(-\frac{1}{1-x}+\operatorname{Re}\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big).\end{aligned}$$

9 $\triangleright$ On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}-\operatorname{Re}\frac{1}{1-xe^{i\theta}} &= \frac{1}{1-x}-\operatorname{Re}\frac{1-xe^{-i\theta}}{|1-xe^{i\theta}|^2}\\ &= \frac{1}{1-x}-\frac{1-x\cos\theta}{1+x^2-2x\cos\theta}\\ &= \frac{1+x^2-2x\cos\theta-(1-x)(1-x\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))}\\ &= \frac{x^2(1-\cos\theta)+x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))}\\ &\geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))}. \qquad (x^2(1-\cos\theta)\geq 0)\end{aligned}$$

D'après ce qui précède et la question précédente, on a :

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\Bigg(\underbrace{-\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))}}_{=A(x)}\Bigg).$$

Dans le cas où $A(x)\leq -\frac{1}{3(1-x)}$, il n'y a rien à faire (par croissance de la fonction exp).
Supposons maintenant $A(x) > -\frac{1}{3(1-x)}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))} &\leq \frac{1}{3(1-x)}\\ 3x(1-\cos\theta) &\leq (1-x)^2+2x(1-\cos\theta) \qquad ((1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))>0)\\ x(1-\cos\theta) &\leq (1-x)^2\\ 0<(1-x)^2+2x(1-\cos\theta) &\leq 3(1-x)^2\\ \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)^2+2x(1-\cos\theta)} &\geq \frac{x(1-\cos\theta)}{3(1-x)^2}\geq\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^2} \qquad (x\geq 1/2>0 \text{ et } 1-\cos\theta\geq 0)\\ -\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))} &\leq -\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}. \qquad (1-x>0)\end{aligned}$$

Par croissance de l'exponentielle, on conclut.

D. Intermède : quelques estimations de sommes

10 $\triangleright$ La fonction $\varphi_{n,\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Étude en 0**.** L'équivalent simple :

$$\varphi_{n,\alpha}(x)\sim\frac{x^n}{x^n}=1$$

montre que $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable en 0.

Étude en $+\infty$. On a :

$$\varphi_{n,\alpha}(x) \sim x^n e^{-\alpha x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{par croissances comparées,}$$

donc $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable en $+\infty$.

En conclusion, $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
Ensuite, la fonction $\varphi_{n,\alpha}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'_{n,\alpha}(x) &= \frac{(nx^{n-1}e^{-\alpha x} - \alpha x^n e^{-\alpha x})(1-e^{-x})^n - x^n e^{-\alpha x} n(1-e^{-x})^{n-1}e^{-x}}{(1-e^{-x})^{2n}} \\ &= \frac{x^{n-1}e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^{n+1}}((n-\alpha x)(1-e^{-x}) - nxe^{-x}).\end{aligned}$$

La fonction $\varphi'_{n,\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Étude en 0. On a le développement limité suivant :

$$(n-\alpha x)(1-e^{-x}) - nxe^{-x} = (n-\alpha x)(x + O(x^2)) - nx(1+O(x)) = O(x^2).$$

Comme on a aussi :

$$\frac{x^{n-1}e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^{n+1}} \sim \frac{x^{n-1}}{x^{n+1}} = \frac{1}{x^2},$$

on en déduit $\varphi'_{n,\alpha}(x) = O(1)$, ce qui montre l'intégrabilité de $\varphi'_{n,\alpha}$ en 0.

Étude en $+\infty$. Comme précédemment, par croissances comparées, on a $\varphi'_{n,\alpha}(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, ce qui montre l'intégrabilité de $\varphi'_{n,\alpha}$ en $+\infty$.

En conclusion, $\varphi'_{n,\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

11 $\triangleright$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $1 - e^{-kt} > 0$ (puisque $kt > 0$), donc la fraction $\frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}$ est bien définie (et positive).

  On a l'équivalent simple suivant quand k tend vers $+\infty$:

  $$\frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n} \sim k^n e^{-kt\alpha}.$$

  Puisque $t\alpha > 0$, on en déduit, par croissances comparées, que :

  $$\frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n} = o\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

  ce qui montre, par comparaison à un exemple de Riemann, que la série $\sum \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}$ est absolument convergente donc convergente.

- Par positivité des termes sommés, on a :

  $$S_{n,\alpha}(t) \geq \frac{e^{-t\alpha}}{(1-e^{-t})^n} > 0.$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties, on a :

  $$\underbrace{\int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)dx}_{=a_k} = t\varphi_{n,\alpha}((k+1)t) - \int_{kt}^{(k+1)t} \varphi_{n,\alpha}(x)dx.$$

Par intégrabilité de $\varphi_{n,\alpha}$ et d'après le premier point, la série $\sum a_k$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k &= t\sum_{k=0}^{+\infty}((k+1)t)^n \frac{e^{-(k+1)\alpha t}}{(1-e^{-(k+1)t})^n} - \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)dx \\ &= t^{n+1}\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j^n e^{-j\alpha t}}{(1-e^{-j\alpha t})^n} - \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)dx \\ &= t^{n+1}S_{n,\alpha}(t) - \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)dx,\end{aligned}$$

ce qui conclut.

- D'après ce qui précède, il suffit de montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \underset{t\to 0^+}{=} O(t).$$

Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} \underbrace{(x-kt)}_{\leq t} |\varphi'_{n,\alpha}(x)|dx \\ &\leq t \underbrace{\int_0^{+\infty} |\varphi'_{n,\alpha}(x)|dx,}_{\text{indépendant de } t} && (\text{intégrabilité de } \varphi'_{n,\alpha})\end{aligned}$$

ce qui conclut.

12 ▷ Pour tout $x > 0$, on a $|e^{-x}| < 1$ donc :

$$\underbrace{\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}}_{=f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{xe^{-(n+1)x}}_{=u_n(x)}.$$

Chaque fonction u_n est continue (par morceaux) et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme f est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par le théorème d'intégration terme à terme (cas positif), on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x)dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} && (\text{par intégration par parties}) \\ &= \frac{\pi^2}{6}. && (\text{résultat admis})\end{aligned}$$

Notons que le caractère fini de la somme montre l'intégrabilité de la fonction f, même s'il était possible de le justifier directement.