RÉSEAU IBNGHAZI

Classe MP*1
Groupe 2

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Devoir Maison N° 3

Les Anneaux Factoriels

Définition (Anneau factoriel)**.** Soit A un anneau. On dit que A est *factoriel* si

(i) A est intègre ;

(ii) **(Existence de la décomposition en irréductibles)** Tout élément non nul peut s'écrit comme un produit d'irréductible : si $a \neq 0$ il existe des éléments $(q_1, \dots, q_s)$ irréductibles dans A tel que $a = q_1 \cdots q_s$.

(iii) **(Unicité de la décomposition en irréductibles)** La décomposition d'un élément non nul et non inversible en facteurs irréductibles est unique à l'ordre près et à la multiplication par des inversibles près : si $q_1 \cdots q_m = q'_1 \cdots q'_s$ avec les q_i et q'_i irréductibles alors $s = m$ et il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ et des éléments $u_i \in A^\times$ tels que $q'_i = u_i q_{\sigma(i)}$.

Partie 1.

1) Montrer qu'un anneau intègre est factoriel si et seulement si tout élément irréductible est premier et il n'existe pas de suite infinie $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i > 0$ on a $x_i \mid x_{i-1}$ et x_i n'est pas associé à x_{i-1}.

2) Montrer qu'un anneau intègre est factoriel si et seulement si toute suite croissante d'idéaux principaux est stationnaire et l'intersection de deux idéaux principaux est principal.

Partie 2.

Soit A un anneau intègre.

1) Démontrer l'équivalence des propositions suivantes

(i) A est factoriel ;

(ii) Tout élément non nul et non inversible possède une décomposition en produit d'irréductibles. Tout élément irréductible est premier ;

(iii) Tout élément non nul et non inversible est produit d'éléments premiers.

(iv) Tout élément non nul et non inversible possède une décomposition en produit d'irréductibles. L'anneau A vérifie le lemme de Gauss : si $a \mid bc$ et a premier avec b alors $a \mid c$.

Dans un anneau intègre, on appelle système de représentants des éléments premiers un ensemble $\mathcal{S}$ d'éléments premiers de A tel que tout élément premier à A soit associé à un élément et un seul.

2) Donner des systèmes de représentants des éléments premiers de $\mathbb{Z}$ et $k[X]$.

3) Soit A un anneau factoriel et $\mathcal{S}$ un système de représentants des éléments premiers de A. Montrer que tout élément $a \in A$ **non nul** s'écrit de manière unique sous la forme

$$a = u_a \prod_{p \in \mathcal{S}} p^{\nu_p}(a)$$

où $u_a \in A^\times$, $\nu_p(a) \in \mathbb{N}$ et $\nu_p(a) = 0$ sauf pour un nombre fini d'éléments $p \in \mathcal{S}$. De plus $\nu_p(a)$ ne dépend pas du choix de p et de a dans leur classe pour la relation "être associé". L'entier $\nu_p(a)$ s'appelle la *multiplicité de p dans a.*

4) Soit A un anneau factoriel et $\mathcal{S}$ un système de représentants des éléments premiers de A et $K = \mathrm{Frac}(A)$. Montrer que tout élément $x \in K$ **non nul** s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = u_a \prod p \in \mathcal{S} p^{\nu_p}(a)$$

où $u_a \in A^\times$, $\nu_p(a) \in \mathbb{Z}$ et $\nu_p(a) = 0$ sauf pour un nombre fini d'éléments $p \in \mathcal{S}$. En déduire que $K^\times \cong_{gr.} A^\times \times \mathbb{Z}^{(\mathcal{S})}$. En déduire que $\mathbb{F}_3(X)^\times$ et $\mathbb{Q}^\times$ sont isomorphes.

5) Soit A un anneau factoriel et $a, b, c \in A$ non nuls avec a et b premiers entre eux. Montrer que si $a \mid c$ et $b \mid c$ alors $ab \mid c$.

6) Soit A un anneau factoriel, $\mathcal{S}$ un système de représentant des éléments premiers de A et $a, b \in A$ non nuls. Montrer que

(i) $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$;

(ii) $a \mid b \quad \iff \quad \forall p \in \mathcal{S}, \quad \nu_p(a) \leq \nu_p(b)$;

(iii) $\prod p \in \mathcal{S} p^{\min(\nu_p(a), \nu_p(b))}$ est un pgcd de a et b ;

Partie 3.

$\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + ib\sqrt{5}, \quad a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.

1) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il est intègre (et noethérien).

2) Déterminer le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. On pourra introduire l'application

$$N : z = a + ib\sqrt{5} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \longmapsto z\overline{z} = a^2 + 5b^2 \in \mathbb{Z}\,.$$

3) Montrer que $p = 2 + i\sqrt{5}$ est irréductible et que (p) n'est pas premier. En déduire que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel.

4) Montrer que 3 et $2 + i\sqrt{5}$ n'ont pas de ppcm et que 9 et $3(2 + i\sqrt{5})$ n'ont pas de pgcd dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.