My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُوني مُولَاي اسماعيل

Devoir Maison N° 3 (EVN)

X 2010

Sur quelques questions de calcul différentiel

Notations et conventions

Pour tout entier $n > 0$, on note $\langle .\,,. \rangle$ le produit scalaire euclidien usuel et $||\,.\,||$ la norme associée sur $\mathbf{R}^n$, S^{n-1} la sphère de rayon 1 dans $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace des matrices réelles à n lignes et n colonnes, I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices inversibles, et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ celui des matrices de déterminant 1. On note $\mathrm{Tr}\,(M)$ la trace d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ${}^tM$ sa transposée, $\widetilde{M}$ la matrice de ses cofacteurs, et l'on rappelle la formule

$$M\,{}^t\widetilde{M} = \det(M)\,I_n\ .$$

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on désigne par $\exp M$ son exponentielle, définie par $\exp M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$. On rappelle que l'application $t \mapsto \exp(tM)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que sa dérivée en 0 est M. De même, si φ est un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $\exp(\varphi)$ son exponentielle donnée par la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^k}{k!}$.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Si $f : U \to \mathbf{R}^p$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$, on note df_x sa différentielle au point x, soit :

$$\forall h \in \mathbf{R}^n, \quad df_x(h) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x+th) - f(x))\ .$$

Préliminaires

1a. Soient α et β deux formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\ker\beta \subset \ker\alpha$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\alpha = \lambda\beta$.

1b. Soient $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_r$ des formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$ telles que $\bigcap_{i=1}^{r} \ker\beta_i \subset \ker\alpha$. Montrer que α est combinaison linéaire de $\beta_1, \dots, \beta_r$. (Une méthode possible est de raisonner par récurrence sur r, en considérant, pour $r \geq 2$, la restriction de α et β_r à $F = \bigcap_{i=1}^{r-1} \ker\beta_i$).

Première partie

2. Soit $\gamma :]-1,1[\to \mathbf{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad ||\gamma(t)|| = 1 \ .$$

Montrer que pour tout t dans $]-1,1[$, $\langle \gamma(t), \gamma'(t)\rangle = 0$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $||x|| = 1$ et soit $v \in \mathbf{R}^n$, non nul, orthogonal à x. Montrer qu'il existe une application $\gamma :]-1,1[\to \mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in]-1,1[$, $||\gamma(t)|| = 1$, $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

4. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit g sa restriction à S^{n-1}. Montrer que g admet des extremums. Si x est un extremum, en considérant une application γ comme ci-dessus, montrer qu'il existe un réel λ tel que

$$df_x(h) = \lambda \langle x, h\rangle, \quad (\forall h \in \mathbf{R}^n) \ .$$

5. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On définit

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \langle x, Ax\rangle \end{cases} .$$

5a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

5b. Soit x un extremum de la restriction de f à S^{n-1}. Montrer que x est vecteur propre de A.

Deuxième partie

Dans cette partie, on considère les fonctions suivantes :

$$q : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R} \\ M \mapsto \displaystyle\sum_{1\le i,j \le n} m_{ij}^2 \end{cases}$$

où m_{ij} est le coefficient de M sur la i-ème ligne et j-ième colonne,

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R} \\ M \mapsto \det(M) - 1 \end{cases}$$

ainsi que la restriction de q à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, que l'on note g.

6a. Montrer que $q(M) = \mathrm{Tr}\,({}^tMM)$.

6b. Vérifier que $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}\,({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

6c. Montrer que q est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

7. On note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ayant pour coefficient 1 à la i-ième ligne et j-ième colonne, et 0 partout ailleurs. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $t \in \mathbf{R}$. Exprimer $\det(M + tE_{ij})$ en fonction de $\det(M)$, de t et des coefficients de la matrice $\widetilde{M}$.
En déduire que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $df_M(H) = \mathrm{Tr}\,({}^t\widetilde{M}H)$.

8. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et que la restriction g de q à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ possède un minimum.

9. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\det(\exp M) = e^{\mathrm{Tr}\,(M)}$.

10. Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $df_M(H) = 0$. Montrer que l'application

$$\gamma : \begin{cases}]-1,1[\to \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t \mapsto M\exp(tM^{-1}H) \end{cases}$$

est à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\gamma(0) = M$, $\gamma'(0) = H$.

11. Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ un point où la fonction g atteint son minimum, et soit H dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $df_M(H) = 0$.

11a. Montrer que $dq_M(H) = 0$.

11b. Déduire de ce qui précède que M est une matrice orthogonale. Que vaut alors $g(M)$?

Troisième partie

Dans cette partie, on se propose de calculer la différentielle en un point quelconque de l'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On rappelle que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

12a. Soient $C_1, C_2 : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$. Posons $B(t) = C_1(t)C_2(t)$. Montrer que B est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout t dans $\mathbf{R}$,

$$B'(t) = C_1'(t)C_2(t) + C_1(t)C_2'(t)\ .$$

12b. Soit $C : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $C(t)$ est inversible et on pose $D(t) = C(t)^{-1}$. Montrer que D est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout t dans $\mathbf{R}$,

$$D'(t) = -C(t)^{-1}C'(t)C(t)^{-1}\ .$$

13. Soient $C_1, C_2 : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des applications de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $C_1(0) = C_2(0) = I_n$.

13a. Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Trouver une application $A : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $A(0) = I_n$ et $A'(0) = \alpha C_1'(0) + \beta C_2'(0)$.

13b. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $C_1(t)$ et $C_2(t)$ soient inversibles pour tout t dans l'intervalle $]-\epsilon, \epsilon[$.

13c. Pour tous s, t dans $]-\epsilon, \epsilon[$, posons $L(s,t) = C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}$. Calculer $\dfrac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(0,0)$ en fonction de $C_1'(0)$ et $C_2'(0)$.

14. Soit $\Phi : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ défini, pour tout X dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ par

$$\Phi(X) : Y \mapsto XYX^{-1} .$$

14a. Montrer que Φ est un morphisme de groupes. Montrer que les coefficients de XYX^{-1} sont des fractions rationnelles des coefficients de X et de Y. En déduire que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

14b. Montrer que $d\Phi_{I_n} : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to L(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ est donné, pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par

$$d\Phi_{I_n}(X)(Y) = XY - YX .$$

Dans la suite du problème, on pose $\varphi(X) = d\Phi_{I_n}(X) : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ Y \mapsto XY - YX . \end{cases}$

15. Soit V un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}(V)$ un morphisme de groupes de classe $\mathcal{C}^1$.

15a. Montrer que pour tout $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$df_X(H) = f(X)\, df_{I_n}(X^{-1}H) = df_{I_n}(HX^{-1})\, f(X) .$$

15b. On fixe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On considère les applications $a, b : \mathbf{R} \to \mathrm{GL}(V)$ définies pour tout $t \in \mathbf{R}$ par

$$a(t) = f(\exp tX), \quad b(t) = \exp(t\, df_{I_n}(X)) .$$

Montrer que $a = b$.

15c. Retrouver le résultat de la question **9** en utilisant le résultat de la question **7**.

15d. Montrer qu'avec les notations de la question **14**, $\Phi(\exp X) = \exp(\varphi(X))$, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

16. On fixe $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Pour tout $s, t \in \mathbf{R}$, on pose

$$u(s,t) = \exp(s(X + tY)), \quad A(s,t) = \exp(-sX)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) .$$

16a. Montrer que $A(1,0) = \exp(-X)\, d\exp_X(Y)$.

16b. Déduire du calcul de $\dfrac{\partial A}{\partial s}(s,t)$ que $\dfrac{\partial A}{\partial s}(s,0) = \exp(-s\varphi(X))(Y)$.

16c. Montrer que $A(s,0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{n+1} \frac{\varphi(X)^n}{(n+1)!}(Y)$.

16d. En déduire une formule (sous forme de série) pour $d\exp_X(Y)$.

* *
*