Séries Entières

Devoir Maison N°3 : X-ENS 2022

On note $\mathbb{C}[[z]]$ l'ensemble des séries entières complexes $f = \sum (f)_k z^k$. Un élément de $\mathbb{C}[[z]]$ est donc une suite complexe $(f)_k$, $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{C}[[z]]$ est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel avec les opérations

$$(f+g)_k := (f)_k + (g)_k \quad , \quad (af)_k := a(f)_k.$$

On le munit aussi du produit de Cauchy $f \cdot g$ donné par

$$(f \cdot g)_k := \sum_{i=0}^{k} (f)_i (g)_{k-i}$$

pour lequel c'est une $\mathbb{C}$-algèbre.

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathbb{C}[[z]]$, on note $f(z)$ la valeur de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (f)_k z^k$$

lorsque celle-ci converge. On note $\rho(f) \in [0, \infty]$ (c'est-à-dire l'ensemble des réels positifs auquel on ajoute l'élément $+\infty$) le rayon de convergence de la série f. Il est caractérisé par la propriété suivante : la série f converge en z si $|z| < \rho(f)$, et diverge si $|z| > \rho(f)$.

On note $O_k \subset \mathbb{C}[[z]]$ l'espace des séries entières dont les k premiers coefficients sont nuls, c'est-à-dire des séries de la forme $(f)_k z^k + (f)_{k+1} z^{k+1} + \cdots$. Pour $f \in \mathbb{C}[[z]]$ et $d \in \mathbb{N}$, on note

$$[f]_d := (f)_0 + (f)_1 z + \cdots + (f)_d z^d$$

le polynôme obtenu en tronquant f à l'ordre d. C'est un élément de $\mathbb{C}[[z]]$, et $f - [f]_d \in O_{d+1}$.

Lorsque $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction développable en série entière au voisinage de 0, on note encore f la série entière correspondante. Par exemple, on note $1/(1-z)$ la série $1 + z + z^2 + \cdots$. On note I, ou z, l'application identité du plan complexe ainsi que la série entière associée.

Étant donné une série entière f, on note $\hat{f}$ la série entière dont les coefficients sont les modules des coefficients de f. Pour $r \in [0, \infty]$, la somme à termes positifs $\hat{f}(r) = \sum_{k \geqslant 0} |(f)_k| \, r^k$ a toujours une valeur dans $[0, \infty]$. On convient pour la définir sans ambiguïté que le terme $|(f)_k| \, r^k$ est nul si $|(f)_k| = 0$, même pour $r = +\infty$.

On définit sur $\mathbb{C}[[z]]$ la relation $\prec$ par

$$f \prec g \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall k \in \mathbb{N}, \quad |(f)_k| \leqslant |(g)_k|)\,.$$

Lorsque $f \in O_1$ vérifie $(f)_1 \neq 0$, elle admet une série réciproque, qui sera définie et étudiée dans la question D, et qui sera ensuite notée $f^{\dagger}$.

Le problème comporte 29 questions, numérotées de 1 à 29, et regroupées par thèmes.

A Premières propriétés

(1) Soit f une série entière et z un complexe tel que $\hat{f}(|z|) < \infty$. Montrer alors que la série f converge en z et que $|f(z)| \leqslant \hat{f}(|z|)$. Donner un exemple où cette inégalité est stricte.

(2) Si f et g sont deux séries entières telles que $f \prec g$, montrer que $\rho(f) \geqslant \rho(g)$.

(3) Montrer, pour $r > 0$, que

$$r < \rho(f) \Rightarrow \exists a > 0 \text{ tel que } f \prec \frac{a}{r-z} \Rightarrow r \leqslant \rho(\hat{f}),$$

déduire en particulier que $\rho(\hat{f}) = \rho(f)$.

(4) Montrer que $\widehat{f \cdot g} \prec \hat{f} \cdot \hat{g}$, déduire que $\rho(f \cdot g) \geqslant \min(\rho(f), \rho(g))$.

B Composition

Si f est une série entière quelconque et g une série entière sans terme constant (c'est-à-dire $g \in O_1$), on définit la composée $f \circ g$ par

$$(f \circ g)_m = \sum_{k=0}^{m} (f)_k \left(g^k\right)_m,$$

où $\left(g^k\right)_m$ est le coefficient de degré m du produit $g^k = g \cdot g \cdots g$ (k facteurs) pour $k \geqslant 1$, et $g^0 = 1$. On verra ci-dessous que $f \circ g(z) = f(g(z))$ sous les hypothèses appropriées, ce qui justifie la notation.

(5) Si $f \in O_n, n \geqslant 0$, $g \in O_1$, $h \in O_l$, $l \geqslant 1$ et $r \geqslant 1$, montrer que $h^r \in O_{rl}$, que $f \circ h \in O_{nl}$ et $f \circ (g + h) - f \circ g \in O_{n+l-1}$.

(6) Soit f et g des séries entières, avec $g \in O_1$. Montrer que $\widehat{f \circ g} \prec \hat{f} \circ \hat{g}$. Déduire que, si f et g ont un rayon de convergence strictement positif, alors $\rho(f \circ g) > 0$.

(7) Si f, g sont à coefficients réels positifs, $h, g \in O_1$, montrer que $h \prec g \Rightarrow f \circ h \prec f \circ g$.

(8) Montrer, si f et $g \in O_1$ sont à coefficients réels positifs et si $r \in [0, \infty]$, que $f \circ g(r) = f(g(r))$.

(9) Soit f et g des séries entières, avec $g \in O_1$. Pour tout z vérifiant $|z| < \rho(\hat{f} \circ \hat{g})$, montrer que la série f converge en $g(z)$ et que $f \circ g(z) = f(g(z))$.

(10) Soit f, g et h des séries entières, avec $g, h \in O_1$, montrer que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

C Série majorante

Dans cette partie, on considère une série entière $g \in O_1$ à coefficients réels positifs. On suppose qu'il existe $a > 0$, $b > 0$ tels que

$$g \prec a \left(I + \frac{g^2}{b - g} \right).$$

On se propose de montrer qu'alors $\rho(g) > 0$. On interprète ici $g^2/(b-g)$ comme la composition $f \circ g$ des séries entières $f(z) = z^2/(b-z)$ et g.

(11) Montrer qu'il existe $r > 0$ et une fonction $h :] - r, r[\longrightarrow \mathbb{R}$, développable en série entière en 0, vérifiant $h(0) = 0$ et telle que

$$h(x) = a\left(x + \frac{h(x)^2}{b - h(x)}\right)$$

pour tout $x \in] - r, r[$. On note encore h l'élément de O_1 associé à la fonction h.

(12) Montrer, par récurrence sur k, que $(g)_k \leqslant (h)_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, conclure.

D Série réciproque

On considère dans la suite du sujet une série entière $f = \lambda z + F$, $F \in O_2$, $\lambda = (f)_1 \neq 0$. On se propose de montrer qu'il existe une unique série $f^\dagger$, la série réciproque de f, telle que $f^\dagger \circ f = I = f \circ f^\dagger$. On montrera de plus dans cette partie que $f^\dagger$ a un rayon de convergence strictement positif si f a un rayon de convergence strictement positif.

(13) Montrer qu'il existe une unique série $h \in O_1$ telle que $h \circ f = I$, et que $(h)_1 = 1/\lambda$.

(14) Montrer qu'il existe une unique série $g \in O_1$ telle que $f \circ g = I$.

(15) Montrer que $g = h$.

(16) Montrer que $\hat{g} \prec (1/\lambda)(I + \hat{F} \circ \hat{g})$, conclure à l'aide de la partie **C** que $\rho(g) > 0$ si $\rho(f) > 0$.

On considère maintenant le cas particulier d'une série de la forme $f = I + F$, $F \in O_2$. On note $G := f^\dagger - I$, $G \in O_2$.

(17) Montrer que $[G]_{d+1} + F \circ (I + [G]_d) \in O_{d+2}$ pour tout $d \geqslant 1$ (la notation $[f]_d$ est définie dans l'introduction du sujet).

(18) On suppose qu'il existe $s > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que $\hat{F}(s) \leqslant \alpha s$. Montrer alors que pour tout $d \geqslant 2$, $\widehat{[G]}_d((1-\alpha)s) \leqslant \alpha s$. Conclure que

$$\hat{G}((1-\alpha)s) \leqslant \alpha s.$$

Toute la suite du sujet est consacrée au problème de linéarisation qui consiste, étant donné une série $f \in O_1$, à trouver une série $h \in O_1$ pour laquelle $h^\dagger \circ f \circ h = (f)_1 z$.

E Linéarisation formelle

On pose $\lambda = (f)_1$ et on note $f = \lambda z + F$, avec $F \in O_2$. On suppose que $\lambda \neq 0$ et que λ n'est pas une racine complexe de l'unité, c'est-à-dire que $\lambda^n \neq 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$, et on se propose de montrer qu'il existe une unique série entière de la forme $h = I + H$, $H \in O_2$ vérifiant $h^\dagger \circ f \circ h = \lambda z$. On étudiera le rayon de convergence de h dans les parties suivantes.

(19) Montrer qu'il existe une unique série $H \in O_2$ telle que $H \circ (\lambda I) - \lambda H = F \circ (I + H)$.

(20) Conclure.

F Linéarisation, cas hyperbolique

On suppose ici que $|\lambda| \notin \{0, 1\}$ et que $\rho(f) > 0$. On se propose de montrer sous ces hypothèses que les séries entières h et H de la partie précédente ont un rayon de convergence strictement positif.

(21) Montrer qu'il existe $\omega > 0$ tel que $|\lambda^m - \lambda| \geqslant \omega$ pour tout entier $m \geqslant 2$.

(22) Montrer que la série H vérifie $\hat{H} \prec \frac{1}{\omega} \hat{F} \circ (I + \hat{H})$.

(23) Conclure.

G Linéarisation, cas elliptique

On étudie maintenant le problème de linéarisation dans le cas $|\lambda| = 1$. On suppose de plus que λ n'est pas une racine de l'unité, de sorte que la suite

$$\omega_k := \left|\lambda^k - \lambda\right|, \; k \geq 2$$

est strictement positive. Contrairement au cas de la partie précédente, elle n'est toutefois pas minorée par un réel strictement positif (fait qui pourra être utilisé sans vérification dans la suite), ce qui nous amène à utiliser une méthode différente pour étudier le rayon de convergence de la série entière h de la partie **E**. On pose, pour $m \geqslant 1$,

$$\alpha_m := \min\left(1/5, \omega_{m+1}, \omega_{m+2}, \ldots, \omega_{2m}\right), \quad \gamma_m := \alpha_m^{2/m},$$

de sorte que $\alpha_m \in]0, 1/5]$ et $\gamma_m \in]0, 1[$.

(24) On se donne une série $F \in O_{m+1}$, $m \geqslant 1$ telle que $\rho(F) > 0$. Montrer qu'il existe $r_0 \in]0, 1[$ tel que $\hat{F}(r) \leqslant r$ pour tout $r \in [0, r_0]$. Montrer alors, pour $\gamma \in]0, 1[$, que

$$\hat{F}(r) \leqslant \gamma^m r$$

pour tout $r \in [0, \gamma r_0]$.

(25) Toujours pour $F \in O_{m+1}$, $m \geqslant 1$, on pose

$$P := \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{(F)_k}{\lambda^k - \lambda} z^k \in O_{m+1} \quad , \quad R := (I + P)^{\dagger} - I.$$

Montrer que $P \circ (\lambda I) - \lambda P - F \in O_{2m+1}$ et que $R + P \in O_{2m+1}$. Montrer que $\hat{P}(r) \leqslant \alpha_m r$ pour tout $r \in [0, \gamma_m r_0]$, et que

$$\hat{R}(r) \leqslant \frac{\alpha_m}{1 - \alpha_m} r$$

pour tout $r \in [0, (1 - \alpha_m)\, \gamma_m r_0]$.

(26) Pour $F \in O_{m+1}$, $m \geqslant 1$, montrer que

$$G := (I+P)^{\dagger} \circ (\lambda I + F) \circ (I+P) - \lambda I = (I+R) \circ (\lambda I + F) \circ (I+P) - \lambda I$$

vérifie $G \in O_{2m+1}$.

(27) Montrer que

$$\hat{G}(r) \leqslant \left(\alpha_m + (1+\alpha_m)\,\alpha_m^2 + \frac{\alpha_m\,(1+\alpha_m)\,(1+\alpha_m^2)}{1-\alpha_m} \right) r \leqslant r$$

pour tout r tel que

$$0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\alpha_m}{(1+\alpha_m)\,(1+\alpha_m^2)} \gamma_m r_0.$$

(28) On considère une série entière $f = \lambda I + F$ avec $F \in O_2$, $\rho(F) > 0$. On suppose encore que λ est de module 1 et n'est pas une racine de l'unité. On considère le réel $r_0 > 0$ donné par la question (24) (appliquée pour $m = 1$) et la suite r_k définie par récurrence à partir de r_0 par la relation

$$r_{k+1} = (1 - \alpha_{2^k}) \left(1 + \alpha_{2^k}^2\right)^{-1} (1 + \alpha_{2^k})^{-1} \gamma_{2^k} r_k.$$

Montrer qu'il existe des suites F_k et P_k d'éléments de O_2, définies pour $k \geqslant 0$, telles que $F_0 = F$ et, pour tout $k \geqslant 0$,

$$\begin{array}{l} \lambda I + F_{k+1} = (I + P_k)^{\dagger} \circ (\lambda I + F_k) \circ (I + P_k) \\ F_k \in O_{1+2^k}, \quad P_k \in O_{1+2^k}, \\ \widehat{F_k}\,(r_k) \leqslant r_k, \quad \widehat{P_k}\,(r_{k+1}) \leqslant r_k - r_{k+1}. \end{array}$$

(29) On pose $r_\infty := \lim r_k$ et

$$h_k := (I + P_0) \circ (I + P_1) \circ \cdots \circ (I + P_{k-1})\,.$$

Expliquer pourquoi r_∞ est bien définie, et montrer que $\hat{h}_k\,(r_k) \leqslant r_0$ pour tout $k \geqslant 1$. Déduire que la série h de la partie **E** vérifie $\hat{h}\,(r_\infty) \leqslant r_0$, donc que $\rho(h) \geqslant r_\infty$.

Fin des questions.

Le nombre r_∞ / r_0 ne dépend que de λ. On peut montrer qu'il est strictement positif pour de nombreux complexes λ de module 1, on a alors $\rho(h) > 0$.

Fin du sujet.

ENS MP 2022, Maths C

Séries entières formelles

Walter Appel & Marc Rezzouk

A Premières propriétés

(1) La série f, évaluée en z, est de terme général $(f)_n\, z^n$, dont le module est $\left|(f)_n\, z^n\right| = (\hat{f})_n\, |z|^n$. La condition « $\hat{f}\big(\,|z|\,\big)$ » se lisant également « la série $\sum(\hat{f})_n\, |z|^n$ converge », et par comparaison de séries positives, la série $\sum(f)_n\, z^n$ converge absolument, donc converge, et

$$\left|f(x)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}(f)_n\, z^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}(\hat{f})_n\, |z|^n = \hat{f}\big(\,|z|\,\big).$$

$$\boxed{\text{Si } \hat{f}\big(\,|z|\,\big) \text{ alors la série } f \text{ converge en } z \text{ et } \left|f(x)\right| \leqslant \hat{f}\big(\,|z|\,\big).}$$

Si l'on choisit par exemple $f = \dfrac{1}{1+z} = \sum(-1)^n\, z^n$, alors $\hat{z} = \sum z^n = \dfrac{1}{1-z}$ et

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{2}{3} < \hat{f}\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$

(2) On suppose $f \prec g$.
Pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| \leqslant \rho(g)$, choisissons $R \in \left]|z|\,, \rho(g)\right[$, alors $\sum(g)_n\, R^n$ converge, et notamment, la suite $\big((g)_n\, R^n\big)_n$ est bornée ; en particulier,

$$\left|(f)_n\, z^n\right| \leqslant \left|(g)_n\right|\, \left|z^n\right| \leqslant \left|(g)_n\, R^n\right| \cdot |z|\, R^n = \mathrm{O}\left(\frac{z}{R}\right)^n$$

donc, $\sum(f)_n\, z^n$ converge et $|z| \leqslant \rho(f)$.
Cela prouve que $]0, \rho(g)[\, \subset [0, \rho(f)]$, et donc

$$\boxed{\rho(f) \geqslant \rho(g).}$$

Remarque : Note : question de cours fort étrange, à cause de la « définition » vraiment maladroite du rayon de convergence selon l'énoncé, caractérisé par une convergence même pas absolue.

(3) Soit $r > 0$. Soit f une série entière telle que $r < \rho(f)$. La suite de terme général $(f)_n\, r^n$ est bornée, on note $M > 0$ un majorant du module de cette suite. On a donc

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \left|(f)_n\right| \leqslant \frac{M}{r^n} = \frac{a}{r^{n+1}}$$

en posant $a = rM > 0$. Puisque

$$\frac{a}{r-z} = \frac{a}{r}\, \frac{1}{1-z/r} = \sum\left(\frac{a}{r^{n+1}}\right)\, z^n$$

on a donc bien montré que $f \prec \dfrac{a}{r-z}$.

Supposons maintenant que $f \prec \dfrac{a}{r-z}$, c'est-à-dire $\left|(f)_k\right| \leqslant a/r^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.
Alors, pour tout $|z| < r$, la série $\left|(f)_k\right|\, z^k$ converge absolument donc converge, et donc $|z| \leqslant \rho(\hat{f})$.
Ainsi $[0, r[\, \subset [0, \rho(\hat{f})]$, et donc $r \leqslant \rho(\hat{f})$.

$$\boxed{r < \rho(f) \implies \exists a > 0 \quad f \prec \frac{a}{r-z} \implies r \leqslant \rho(\hat{f}).}$$

Notamment, en libérant r, on a montré que $[0, \rho(f)[\, \subset [0, \rho(\hat{f})]$, et donc $\rho(f) \leqslant \rho(\hat{f})$.
Or $f \prec \hat{f}$ donc la question **(2)** montre que $\rho(\hat{f}) \leqslant \rho(f)$.

$$\boxed{\rho(\hat{f}) = \rho(f).}$$

Remarque : Là encore, avec la définition usuelle du rayon d'une série entière, la propriété $\rho(f) = \rho(\hat{f})$ est une trivialité qui ne nécessite pas ces acrobaties amusantes mais sans doute destabilisantes pour les élèves.

(4) Pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\left(\widehat{f \cdot g}\right)_k = \left|(f \cdot g)_k\right| = \left|\sum_{i=0}^{k} (f)_i\,(g)_{k-i}\right| \leqslant \sum_{i=0}^{k} \left|(f)_i\right|\left|(g)_{k-i}\right| = \sum_{i=0}^{k} (\hat{f})_i\,(\hat{g})_{k-1} = (\hat{f} \cdot \hat{g})_k.$$

ce qui montre que

$$\boxed{\widehat{f \cdot g} \prec \hat{f} \cdot \hat{g}.}$$

Notamment, par les questions **(2)** et **(3)**,

$$\rho(f \cdot g) = \rho\big(\widehat{f \cdot g}\big) \leqslant \rho(\hat{f} \cdot \hat{g}).$$

Pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| \leqslant \min\big(\rho(\hat{f}), \rho(\hat{g})\big)$, les séries $\sum (\hat{f})_n\, z^n$ et $\sum (\hat{g})_n\, z^n$ convergent absolument, donc leur produit de Cauchy $\sum (\hat{f} \cdot \hat{g})_n\, z^n$ converge absolument, donc converge.
On en déduit que $\rho(\hat{f} \cdot \hat{g}) \geqslant \min\big(\rho(\hat{f}), \rho(\hat{g})\big)$ et donc, en réutilisant la question **(3)**,

$$\boxed{\rho(f \cdot g) \geqslant \min\big(\rho(f), \rho(g)\big).}$$

Remarque : Encore une fois, les propriétés habituelles du cours permettent de démontrer en une ligne la deuxième propriété sans passer par la première. En clair, un étudiant risque de perdre plus de temps à essayer de comprendre ce que pense le concepteur du sujet que de (re)démontrer les choses de manière élémentaire.

B Composition

Remarquons avant de commencer que, si $g \in O_1$, alors $g^k \in O_k$ (ce sera prouvé dans la question qui suit, mais c'est assez immédiat), et donc

$$(f \circ g)_m = \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k\,(g^k)_m, \qquad (*)$$

la somme étant en réalité finie.

(5) On commence par vérifier un petit lemme très simple :

Lemme 1 *Si $\phi \in O_k$ et $\psi \in O_\ell$, alors $\phi \cdot \psi \in O_{k+\ell}$.*

En effet, pour tout $i \leqslant k+\ell$, on peut calculer $(\phi \cdot \psi)_i = \sum_{j=0}^{i} (\phi)_i\,(\psi)_{i-j} = 0$ car dans cette somme, si $j < k$ alors $(\phi)_i = 0$, tandis que, si $j > k$ alors $i - j < \ell$ et $(\psi)_{i-j} = 0$.
Par récurrence, on en déduit que

$$\boxed{h^r \in O_{r\ell}.}$$

Soit $m < n\ell$; alors

$$(f \circ h)_m = \sum_{k=0}^{m} (f)_k\,(h^k)_m.$$

Dans cette somme, si $k < n$ alors $(f)_k = 0$, et si $k > n$, alors $h^k \in O_{k\ell} \subset O_{n\ell}$, donc $(h^k)_m = 0$. Ainsi $(f \circ h)_m = 0$.

$$\boxed{f \circ h \in O_{n\ell}.}$$

De manière générale, on remarquera aussi ce résultat, extrêmement utile pour la suite :

Lemme 2 *Si $\phi \in O_k$ et $\psi \in O_\ell$, alors $(\phi \cdot \psi)_m$ ne dépend que des coefficients $(\phi)_k, \dots, (\phi)_{m-k}$ et $(\psi)_k, \dots, (\psi)_{m-\ell}$. Notamment, si $\psi \in O_\ell$, alors $(\psi^k)_m$ ne dépend que des $(\psi)_i$ pour $\ell \leqslant i \leqslant m - k\ell$.*

Invoquons maintenant la structure d'algèbre commutative de $\mathbf{C}[[z]]$ pour utiliser une formule type « binôme de Newton » :

$$(g+h)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g^i \cdot h^{k-i}.$$

On peut maintenant calculer, pour un entier $m \leqslant n+\ell-1$,

$$\begin{aligned}
\big(f\circ(g+h)\big)_m &= \sum_{k=0}^{m}(f)_k\left((g+h)^k\right)_m = \sum_{k=0}^{m}(f)_k\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}g^i\cdot h^{k-i}\right)_m\\
(f\circ g)_m &= \sum_{k=0}^{m}(f)_k\,(g^k)_m\\
\big(f\circ(g+h)-f\circ g\big)_m &= \sum_{k=0}^{m}(f)_k\left(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\underbrace{g^i\cdot h^{k-i}}_{\in O_{i+(k-i)\ell}}\right)_m
\end{aligned}$$

Or, dans cette dernière somme :
— Si $k<n$, alors $(f)_k=0$.
— Si $k\geqslant n$, puisque la fonction affine $\phi : i\mapsto i+(k-i)\ell$ est décroissante et vérifie donc pour $i=0,\dots,k-1$

$$\phi(i)\geqslant\phi(k-1)=k-1+\ell\geqslant n-1+\ell\geqslant m$$

ce qui montre que $(g^i\cdot h^{k-i})_m=0$; ainsi, le second facteur est nul.
Au final, on a bien $\big(f\circ(g+h)-f\circ g\big)_m=0$.

$$\boxed{f\circ(g+h)-f\circ g\in O_{n+\ell-1}.}$$

(6) Pour tout m entier, on a

$$\begin{aligned}
\big|(f\circ g)_m\big| &\leqslant \sum_{k=0}^{m}\big|(f)_k\big|\,\big|(g^k)_m\big| = \sum_{k=0}^{m}(\hat f)_k\,(\widehat{g^k})_m\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{m}(\hat f)_k\,(\hat g^k)_m = (\hat f\circ\hat g)_m. && \textit{car par (4), } \widehat{g^k}\prec\hat g^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\widehat{f\circ g}\prec\hat f\circ\hat g.}$$

Choisissons x tel que $0\leqslant\hat g(x)<\rho(f)$; c'est possible car $\hat g$ est continue au voisinage de 0 et $\hat g(0)=0$. On effectue alors, dans $\mathbf{R}^+\cup\{+\infty\}$, des calculs qui, on le rappelle, sont notamment justifiés dès qu'on a prouvé qu'une des sommes est finie :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty}(\hat f\circ\hat g)_m\,x^m &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}(\hat f)_k\,(\widehat{g^k})_m\,x^m\\
&\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}(\hat f)_k\,(\hat g^k)_m\,x^m\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(\hat f)_k\,(\hat g^k)_m\,x^m && \textit{si } k>m, \textit{ alors } (g^k)_m=0\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(\hat f)_k\sum_{m=0}^{\infty}(\hat g^k)_m\,x^m && \textit{Fubini positif}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(\hat f)_k\,\big(\hat g(x)\big)^k < +\infty.
\end{aligned}$$

Notamment, la série entier $\hat f\circ\hat g$ converge en $x>0$, donc $\rho(\hat f\circ\hat g)>0$. On en déduit que

$$\rho(f\circ g)\underset{\mathbf{(3)}}{=}\rho\big(\widehat{f\circ g}\big)\underset{\mathbf{(2)}}{\geqslant}\rho(\hat f\circ\hat g)>0.$$

$$\boxed{\text{Si } \rho(f)>0 \text{ et } \rho(g)>0,\text{ alors } \rho(f\circ g)>0.}$$

(7) On suppose $h\prec g$, c'est-à-dire $\big|(h)_k\big|\leqslant g_k$ pour tout $k\in\mathbf{N}$. Remarquons d'abord que la question **(4)** montre que $\widehat{h^k}\prec\hat h^k$ et que, pour des fonctions à coefficients positifs, une récurrence immédiate montre que

$$\phi\prec\phi\implies\phi^k\prec\psi^k$$

donc

$$\widehat{h^k}\prec\hat h^k\leqslant g^k.$$

Alors pour tout $m \in \mathbf{N}$,

$$\left|(f \circ h)_m\right| = \left|\sum_{k=0}^{m} (f)_k \, (h^k)_m\right| \leqslant \sum_{k=0}^{m} (f)_k \, (g^k)_m = (f \circ g)_m.$$

$$\boxed{\text{Si } h \prec g \text{ et } f, g \text{ à coefficients positifs, alors } f \circ h \prec f \circ g.}$$

(8) On peut reprendre exactement tout le calcul de la question **(6)**, en manipulant des sommes de réels positifs ou infinis :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} (f \circ g)_m \, r^m &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} (f)_k \, (g^k)_m \, r^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k \, (g^k)_m \, r^m && \textit{si } k > m, \textit{ alors } (g^k)_m = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k \sum_{m=0}^{\infty} (g^k)_m \, r^m && \textit{Fubini positif} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k \, \big(g(z)\big)^k = f\big(g(r)\big).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } f \text{ et } g \text{ à coefficients positifs et si } r \in [0, +\infty], \text{ alors } f \circ g(r) = f\big(g(r)\big).}$$

(9) Si $|z| < \rho(\hat{f} \circ \hat{g})$, alors ce qui précède montre que la famille

$$\big((f)_k \, (g^k)_m \, z^m\big)_{(m,k) \in \mathbf{N}^2}$$

est sommable, on peut donc effectuer le même calcul, toutes les sommes « intermédiaires » étant bien définies (c'est une des conséquences du théorème de sommation par paquets)

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} (f \circ g)_m \, z^m &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k \, (g^k)_m \, z^m && \textit{si } k > m, \textit{ alors } (g^k)_m = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k \sum_{m=0}^{\infty} (g^k)_m \, z^m && \textit{Fubini} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k \, \big(g(z)\big)^k = f\big(g(z)\big).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } |z| < \rho(\hat{f} \circ \hat{g}), \text{ alors } f \circ g(z) = f\big(g(z)\big).}$$

(10) Soient f, g, h des séries entières, avec $g, h \in O_1$.
Tout d'abord, énonçons un petit lemme, équivalent pour les séries formelles de la formule évidente pour des produits et compositions de fonctions « $(\phi\psi) \circ h = (\phi \circ h) \cdot (\psi \circ h)$ ».

Lemme 3 *Si $h \in O_1$, alors $(\phi \cdot \psi) \circ h = (\phi \circ h) \cdot (\psi \circ h)$.*

Munis de ce lemme, nous pouvons nous lancer dans le calcul formel, en utilisant la forme $(*)$ du produit de composition. Toutes les sommes que nous manipulons sont en réalité *finies*.
Soit $m \in \mathbf{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\big((f \circ g) \circ h\big)_m &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} (f)_\ell \, (g^\ell)_k\right) (h^k)_m \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} (f)_\ell \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (g^\ell)_k \, (h^k)_m}_{(g^\ell \circ h)_m} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (f)_\ell \, (g^\ell \circ h)_m \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} (f)_\ell \, \big((g \circ h)^\ell\big)_m && \textit{grâce au lemme 3, } g^\ell \circ h = (g \circ h)^\ell \\
&= \big(f \circ (g \circ h)\big)_m.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).}$$

Montrons maintenant le lemme 3. Toujours en utilisant la forme $(*)$ du produit de composition, on a pour tout $m \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
\big((\phi\psi) \circ h\big)_m &= \sum_{k=0}^{\infty} (\phi\psi)_k \, (h^k)_m \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} (\phi)_i \, (\psi)_j \, (h^{i+j})_m \\
&= \sum_{i,j \in \mathbf{N}} (\phi)_i \, (\psi)_j \, (h^{i+j})_m && \textit{dépaquetage} \\
&= \sum_{i,j \in \mathbf{N}} (\phi)_i \, (\psi)_j \sum_{k+\ell=m} (h^i)_k \, (h^j)_\ell && \textit{produit de Cauchy} \\
&= \sum_{k+\ell=m} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (\phi)_i \, (h^i)_k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} (\psi)_j \, (h^j)_\ell \right) \\
&= \sum_{k+\ell=m} (\phi \circ h)_k \, (\psi \circ h)_\ell = \big((\phi \circ h) \cdot (\psi \circ h)\big)_m,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme, et de la question.

C Série majorante

(11) Procédons par analyse. Soit h une fonction développable en série entière vérifiant la relation

$$\forall x \in \left]-r, r\right[\qquad h(x) = a \left(x + \frac{h(x)^2}{b - h(x)} \right).$$

Fixons momentanément x dans $\left]-r, r\right[$; alors le réel $h(x)$ est solution de l'équation du second degré

$$(a+1)\, h(x)^2 - (ax + b)\, h(x) + abx = 0,$$

donc vaut

$$h(x) = \frac{ax + b \pm \sqrt{\Delta(x)}}{2(a+1)} \qquad \Delta(x) = b^2\big(1 + \phi(x)\big) \qquad \phi(x) = a^2 b^{-2}\, x^2 - 2ab^{-1}(2a+1)x.$$

Le choix de signe négatif s'impose pour avoir d'une part la condition $h(0) = 0$, et d'autre part la continuité de la fonction.
On *pose* donc, après avoir fixé un voisinage $\left]-r, r\right[$ sur lequel la fonction ϕ prend des valeurs incluses dans $\left]-1, 1\right[$,

$$\forall x \in \left]-r, r\right[\qquad h(x) := \frac{ax + b - \sqrt{\Delta(x)}}{2(a+1)} \qquad \Delta(x) = b^2\big(1 + \phi(x)\big) \qquad \phi(x) = a^2 b^{-2}\, x^2 - 2ab^{-1}(2a+1)x.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{\Delta(x)}$ est la composée de $x \mapsto b\sqrt{1+x}$ et de la fonction $\phi \in O_1$, toutes deux développable en série entière, donc est développable en série entière d'après la question **(9)**, ce qui montre que h est développable en série entière.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Il existe } r > 0 \text{ et } h : \left]-r, r\right[\to \mathbf{R} \text{ développable en série entière telle que } h(0) = 0 \\ \text{et} \\ \qquad \forall x \in \left]-r, r\right[\qquad h(x) = a \left(x + \dfrac{h(x)^2}{b - h(x)} \right). \end{array}}$$

(12) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ que $(g)_k \leqslant (h)_k$. On rappelle que l'on a $g, h \in O_1$,

$$g \prec a(I + f \circ g) \qquad h = a(I + f \circ h)$$

et que f est à coefficients strictement positifs.

- **Au rang 0**, on a bien $h_0 = g_0 = 0$.

- **Soit k un entier** tel que $0 \leqslant (g)_i \leqslant (h)_i$ pour $i = 0, \ldots, k$. Alors, les coefficients de $f \circ g$ étant tous positifs
$$(g)_{k+1} \leqslant a\big[\delta_{1,i} + (f \circ g)_{k+1}\big].$$
Or
$$(f \circ g)_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} (f)_{k+1}\,(g^j)_{k+1}$$
et d'après le lemme 2, $(g^j)_{k+1}$ ne dépend que $g_1, \ldots, g_k$, sous forme de somme de produits. D'après l'hypothèse de récurrence, on a notamment
$$(g^j)_{k+1} \leqslant (h^j)_{k+1}$$
pour tous les termes concernés ; les f_i étant tous positifs, on a donc
$$(f \circ g)_{k+1} \leqslant \sum_{j=1}^{k+1} (f)_{k+1}\,(h^j)_{k+1} = (f \circ h)_{k+1}$$
puis
$$(g)_{k+1} \leqslant a\big[\delta_{1,i} + (f \circ g)_{k+1}\big] \leqslant \big[\delta_{1,i} + (f \circ h)_{k+1}\big] = (h)_{k+1}.$$

Par récurrence, on a donc montré que
$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant (g)_k \leqslant (h)_k.}$$
Cela montre que $g \prec h$ et donc d'après **(2)**, $\rho(g) \geqslant \rho(h) > 0$.
$$\boxed{\rho(g) > 0.}$$

D Série réciproque

(13) Procédons par analyse-synthèse.

Analyse

Soit $h \in O_1$ vérifiant $h \circ f = I$. Alors bien sûr $(h)_0 = 0$, puis $1 = (h \circ f)_1 = (h)_1(f)_1$, donc $(h)_1 = 1/\lambda$.
De plus, pour tout $m \geqslant 2$,
$$0 = (h \circ f)_m = \sum_{k=1}^{m} (h)_k\,(f^k)_m$$
donc notamment
$$(h)_m\,(f^m)_m = -\sum_{k=1}^{m-1} (h)_k\,(f^k)_m$$
avec $(f^m)_m = \lambda^m \neq 0$.
Ainsi, la suite de terme général $(h)_m$ vérifie une relation de récurrence, et est donc entièrement déterminée.

Synthèse

Si l'on pose $(h)_0 := 0$, $(h)_1 := 1/\lambda$ et
$$(h)_m := -\frac{1}{\lambda^m} \sum_{k=1}^{m-1} (h)_k\,(f^k)_m$$
pour tout $m \geqslant 2$, alors la série h vérifie bien les conditions voulues.
$$\boxed{\text{Il existe une unique série } h \in O_1 \text{ telle que } h \circ f = I \text{ ; de plus, } (h)_1 = 1\lambda.}$$

(14) Le travail est à peu près le même, puisqu'une série adéquate vérifie $(g)_0 = 0$, $(g)_1 = 1/\lambda$ et pour tout $m \geqslant 2$,
$$0 = (f \circ g)_m = \sum_{k=1}^{m} (f)_k\,(g^k)_m.$$
Or, d'après le lemme 2, pour tout $k \geqslant 2$, le terme $(g^k)_m$ ne dépend que de $(g)_1, \ldots, (g)_{m-1}$; dans la somme, le seul terme faisant intervenir $(g)_m$ est donc $(f)_1\,(g)_m = \lambda\,(g)_m$. Ainsi la suite g vérifie de même une relation de récurrence, et est donc définie de manière unique.

$$\boxed{\text{Il existe une unique série } g \in O_1 \text{ telle que } f \circ g = I.}$$

(15) Puisque $h \circ f = f \circ g = I$, on peut écrire

$$\begin{aligned} h &= h \circ (f \circ g) \\ &= (h \circ f) \circ g && \textit{d'après } \textbf{\textit{(10)}} \\ &= g. \end{aligned}$$

$$\boxed{g = h.}$$

(16) Puisque $I = f \circ g = (\lambda I + F) \circ g$, on a

$$I = \lambda I \circ g + F \circ g = \lambda g + F \circ g$$

puisque $I \circ g = g$. On peut donc écrire

$$g = \frac{1}{\lambda}(I - F \circ g)$$

puis par inégalité triangulaire

$$\hat{g} \prec \frac{1}{\lambda}(I + \widehat{F \circ g}) \prec \frac{1}{\lambda}(I + \hat{F} \circ \hat{g}). \qquad \textit{question } \textbf{\textit{(6)}}$$

$$\boxed{\hat{g} \prec \tfrac{1}{\lambda}(I + \hat{F} \circ \hat{G}).}$$

Puisque $\rho(F) > 0$, choisissons un réel r tel que $0 < r < \rho(F)$.
Puisque $F \in O_2$, on peut noter $G = F/z^2$ la série de terme général $(G)_k = (F)_{k-2}$. On bien évidemment $\rho(G) = \rho(F)$. D'après la question **(3)** [1], il existe donc $a > 0$ telle que $\hat{G} \prec \frac{a}{r-z}$, et donc

$$\hat{F} \prec \phi := a\,\frac{z^2}{r - z}.$$

On a donc grâce à la question **(7)**

$$\hat{g} \prec \frac{1}{\lambda}(I + \hat{F} \circ \hat{g}) \prec \frac{1}{\lambda}(I + \phi \circ \hat{g}) = \frac{1}{\lambda}\left(I + a\frac{\hat{g}^2}{r - \hat{g}}\right) \prec \alpha\left(I + \frac{\hat{g}^2}{r - \hat{g}}\right)$$

en posant $\alpha := \frac{1}{|\lambda|}\max(a, 1)$.
On peut alors appliquer le résultat de la partie C pour obtenir

$$\boxed{\rho(g) > 0.}$$

(17) Remarquons que $f^\dagger + F \circ f^\dagger - I = 0$. Notons $f^\dagger = I + [G]_d + H$ avec $H \in O_{d+1}$, on a donc

$$G = -F \circ \big(I + [G]_d + H\big)\big).$$

On utilise le dernier point de la question **(5)** :

$$F \circ \big(I + [G]_d + H\big) - F \circ \big(I + [G]_d\big) \in O_{2+(d+1)-1} = O_{d+2}$$

avec $n \leftarrow 2$, $\ell \leftarrow d + 1$ (et $f = F$, $g = I + [G]_d$, $h = H$).
En conclusion, $G - [G]_{d+1} \in O_{d+2}$ et

$$\underbrace{F \circ \big(I + [G]_d + H\big)}_{=G} - F \circ \big(I + [G]_d\big) \in O_{d+2}$$

donc, en sommant,

$$\boxed{[G]_{d+1} + F \circ \big(I + [G]_d\big) \in O_{d+2}.}$$

(18) Effectuons une récurrence sur $d \geqslant 2$.

- **Pour $d = 1$,** $[G]_2 + F \in O_3$ (puisque $[G]_1 = 0$) donc

$$[\widehat{G}]_2\big((1 - \alpha)s\big) = [\widehat{F}]_2\big((1 - \alpha)s\big) \leqslant \widehat{F}\big((1 - \alpha)s\big) \leqslant \widehat{F}(s) \leqslant \alpha s.$$

1. On rappelle le raisonnement : la suite de terme général $(G)_k\, r^k$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe a telle que $(\hat{G})_k \leqslant a/r^{k+1}$ pour tout $k \geqslant 0$.

- **Soit $d \geqslant 2$** et supposons le résultat vrai pour d.
D'après la question précédente, $[G]_{d+1} = -\left[F \circ \big(I + [G]_d\big)\right]_{d+1}$, or
$$\left[F \circ \big(I + [G]_d\big)\right]_{d+1} = [F]_{d+1} \circ \big(I + [G]_d\big).$$
(En effet, d'après la question **(5)**, $\big(F - [F]_{d+1}\big) \circ \big(I + [G]_d\big) \in O_{d+2}$.)
Ainsi,
$$\begin{aligned}
[\widehat{G}]_{d+1}((1-\alpha)s) &\leqslant [\widehat{F}]_{d+1}\big((1-\alpha)s + [\widehat{G}]_d\big((1-\alpha)s\big)\big) \\
&\leqslant [\widehat{F}]_{d+1}\big((1-\alpha)s + [\widehat{G}]_d(s)\big) && \textit{par monotonie} \\
&\leqslant [\widehat{F}]_{d+1}\big((1-\alpha)s + \alpha s\big) && \textit{par hypothèse de récurrence} \\
&\leqslant [\widehat{F}]_{d+1}(s) \leqslant \widehat{F}(s) \leqslant \alpha s.
\end{aligned}$$

E Linéarisation formelle

(19) Procédons encore par analyse-synthèse.

Analyse

On suppose qu'il existe une série $H \in O_2$ telle que $H \circ (\lambda I) - \lambda H = F \circ (I + H)$. Pour tout $m \geqslant 2$, on a donc
$$\big(H \circ (\lambda I) - \lambda H\big)_m = h_m\,(\lambda^m - \lambda) = \big(F \circ (I + H)\big)_m.$$
Or, $F \in O_2$, donc $\big(F \circ (I + H)\big)_m$, ne faisant intervenir que des puissances $k \geqslant 2$ de $(I + H)$, ne dépend que des coefficients $(h)_1, \dots, (h)_{k-1}$. Puisque $m \geqslant 2$, la quantité $\lambda^m - \lambda = \lambda(\lambda^{m-1} - 1)$ est toujours non nul par hypothèse, on en déduit que la suite H vérifie donc une relation de récurrence et est entièrement déterminée.

Synthèse

On définit $(H)_0 = (H_1) = 0$ et la suite H par la relation de récurrence
$$\forall m \geqslant 2 \qquad h_m = \frac{1}{\lambda(\lambda^{m-1} - 1)}\big(F \circ (I + H)\big)_m.$$
Alors $H \in O_2$ et elle vérifie bien la relation $H \circ (\lambda I) - \lambda H = F \circ (I + H)$.

(20) Posons $h = I + H$. La relation $H \circ (\lambda I) - \lambda H = F \circ (I + H)$ s'écrit
$$H \circ (\lambda I) = \underbrace{(F + \lambda I)}_{f} \circ h - \lambda \underbrace{I \circ h}_{h} + \lambda H$$
ou encore
$$f \circ h = H \circ (\lambda I) + \lambda I = h \circ (\lambda I).$$
En composant par $h^\dagger$ à gauche, on obtient
$$h^\dagger \circ f \circ h = \lambda I$$
ou encore
$$\boxed{h^\dagger \circ f \circ h = \lambda z.}$$

F Linéarisation, cas hyperbolique

(21) On propose deux méthodes.
1re méthode La seconde inégalité triangulaire montre que, pour tout $m \geqslant 2$,
$$\begin{aligned}
|\lambda^m - \lambda| = |\lambda|\,(\lambda^{m-1} - 1) &\geqslant |\lambda| \cdot \big|\,|\lambda|^{m-1} - 1\big| \\
&\geqslant |\lambda| \cdot \big|\,|\lambda| - 1\big| \underbrace{\big(|\lambda|^{m-2} + \cdots + |\lambda| + 1\big)}_{\geqslant 1}
\end{aligned}$$
donc, en posant $\omega := |\lambda| \cdot \big|\,|\lambda| - 1\big| > 0$,

$$\boxed{\text{On a trouvé } \omega > 0 \text{ tel que } |\lambda^m - \lambda| \geqslant \omega \text{ pour tout } m \geqslant 2.}$$

2e méthode Dans $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, la suite $\big(|\lambda^m - \lambda|\big)_m$ ne s'annule pas et admet une limite valant $|\lambda| > 0$ (si $|\lambda| < 1$) ou $+\infty$ (si $|\lambda| > 1$). Il existe un rang m_0 tel que

$$\forall m \geqslant m_0 \qquad |\lambda^m - \lambda| \geqslant \frac{|\lambda|}{2} > 0.$$

Il suffit alors de poser $\omega = \min\big\{\, |\lambda^m - \lambda| \ ; 2 \leqslant m \leqslant m_0 \big\} \cup \{|\lambda|/2\}$.

$$\boxed{\text{Il existe } \omega > 0 \text{ tel que } |\lambda^m - \lambda| \geqslant \omega \text{ pour tout } m \geqslant 2.}$$

(22) Pour tout $m \geqslant 2$,

$$(h)_m \cdot (\lambda^m - \lambda) = \big(H \circ (\lambda I) - \lambda H\big)_m = \big(F \circ (I + H)\big)_m$$

(la relation est encore vraie pour $m = 0$ et $m = 1$, les deux membres étant nuls, mais ne nous intéresse pas ici), donc

$$\big|(h)_m\big| \leqslant \frac{1}{\omega} \big|\big(F \circ (I + H)\big)_m\big|$$

ce qui s'écrit

$$\hat{H} \prec \frac{1}{\omega} \widehat{F \circ (I + H)} \underset{\textbf{(6)}}{\prec} \frac{1}{\omega} \hat{F} \circ (I + \hat{H}).$$

$$\boxed{\hat{H} \prec \tfrac{1}{\omega} \hat{F} \circ (I + \hat{H}).}$$

(23) Notons $G = I + \hat{H}$, de sorte que G est à coefficients positifs et $G \in O_1$. La relation précédente s'écrit

$$G = I + \hat{H} \prec I + \frac{1}{\omega} \hat{F} \circ G \prec \beta\big(I + \hat{F} \circ G\big) \qquad \text{avec} \qquad \beta = \max\left(\frac{1}{\omega}, 1\right)$$

et toutes les conditions sont réunies pour appliquer de nouveau la partie C comme à la question **(16)** : $\hat{F}$ et G sont à coefficients positifs, $G \in O_1$ et $\hat{F} \in O_2$, et $\rho(\hat{F}) = \rho(F) = \rho(f) > 0$. On en déduit que $\rho(G) > 0$, donc, puisque $\rho(G) = \rho(\hat{H}) = \rho(H) = \rho(h)$:

$$\boxed{\rho(h) = \rho(H) > 0.}$$

G Linéarisation, cas elliptique

(24) Écrivons F sous la forme $\widehat{F}(r) = r^{m+1}\, H(r)$. Puisque $\dfrac{\widehat{F}(r)}{r} \xrightarrow[r \to 0^+]{} 0$, il existe $r_0 \in\,]0,1[$ tel que $0 \leqslant \widehat{F}(r) \leqslant r$. Soit $\gamma \in\,]0,1[$. Pour tout $r \in [0, \gamma r_0]$,

$$0 \leqslant \widehat{F}(r) = r^{m+1} H(r) \leqslant \gamma^m r_0^m r\, H(r_0) \leqslant \gamma^m\, r$$

car H est croissante sur $[0, r_0]$ et $r_0^m\, H(r_0) = \widehat{F}(r_0) \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout } r \in [0, \gamma r_0],\ \hat{F}(r) \leqslant \gamma^m\, r.}$$

(25) $P \circ (\lambda I) - \lambda P = \displaystyle\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{(F)_k}{\lambda^k - \lambda} (\lambda^k - \lambda) z^k = \sum_{k=m+1}^{2m} (F)_k z^k = [F]_{2m}$ car $F \in O_{m+1}$.

Enfin, puisque $\big(P \circ (\lambda I) - \lambda P - F\big)_{2m} = 0$,

$$\boxed{P \circ (\lambda I) - \lambda P - F \in O_{2m+1}.}$$

$(I + P) \circ (R + I) = I$ donc $R + P = -P \circ R \in O_{m+1}$ car $R \in O_1$, $P \in O_{m+1}$ en appliquant la question **(5)**. Ainsi, $R = P - P \circ R \in O_{m+1}$, puis $R + P = -P \circ R \in O_{(m+1)^2} \subset O_{2m+1}$ car $R \in O_{m+1}$, $P \in O_{m+1}$ en appliquant **(5)**.

$$\boxed{R + P \in O_{2m+1}.}$$

Pour $r \in [0, \gamma_m r_0]$,

$$\widehat{P}(r) \leqslant \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{\big|(F)_k\big|}{\min\left(\omega_{m+1}, \cdots, \omega_{2m}\right)}\, r^k \leqslant \frac{1}{\alpha_m}\, \widehat{F}(r)$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha_m}\, \gamma_m^m\, r = \frac{\alpha_m^2}{\alpha_m}\, r = \alpha_m\, r.$$

$$\boxed{\forall r \in [0, \gamma_m r_0]\,, \qquad \widehat{P}(r) \leqslant \alpha_m\, r.}$$

Soit $r \in [0, (1-\alpha_m)\gamma_m r_0]$; on le note sous la forme $r = (1-\alpha_m)\gamma_m r_0 u$ avec $u \in [0,1]$.
On utilise la question **(18)**, avec $F \leftarrow R$ et $G \leftarrow R$, $s = \gamma_m r_0 u$ (le cas $u = 0$ étant valide),

$$\hat{R}\big((1-\alpha_m)s\big) \leqslant \alpha_m s,$$

donc

$$\hat{R}(r) = R\big((1-\alpha_m)\gamma_m r_0 u\big) \leqslant \alpha_m \gamma_m r_0\, u = \frac{\alpha_m}{1-\alpha_m} r.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } r \in [0, (1-\alpha_m)\gamma_m r_0],\ \hat{R}(r) \leqslant \frac{\alpha_m}{1-\alpha_m} r.}$$

(26) Puisque $(I+R)\circ(I+P) = I$,

$$G = \big[(I+R)\circ(\lambda I + F) - \lambda(I+R)\big]\circ(I+P).$$

Montrons que $(I+R)\circ(\lambda I+F) - \lambda(I+R) \in O_{2m+1}$ et on conclura par **(5)** que $G \in O_{2m+1}$ car $I + F \in O_1$.

$$(I+R)\circ(\lambda I+F) - \lambda(I+R) = R\circ(\lambda I + F) - \lambda R + F.$$

Or d'après **(5)**, et en prenant $f = R$, $g = \lambda I$ et $h = F$, $R\circ(\lambda I+F) - R\circ(\lambda I) \in O_{2m+1}$ car $R \in O_{2m+1}$.
On est ramené à montrer que $A = R\circ(\lambda I) - \lambda R + F \in O_{2m+1}$.
Mais on sait que $B = P\circ(\lambda I) - \lambda P - F \in O_{2m+1}$ (question **(25)**), et

$$A + B = \underbrace{(R+P)\circ(\lambda I)}_{\in O_{2m+1}\text{par } \mathbf{(25)} \text{ et } \mathbf{(5)}} \; - \underbrace{\lambda(R+P)}_{\in O_{2m+1}} \in O_{2m+1}.$$

Donc on a bien $A = R\circ(\lambda I) - \lambda R + F \in O_{2m+1}$, et finalement

$$\boxed{G \in O_{2m+1}.}$$

(27) Puisque $G + \lambda I = (I+R)\circ(\lambda I + F)\circ(I+P)$,

$$\widehat{G+\lambda I} = \widehat{G} + I \prec (I+\widehat{R})\circ(I+\widehat{F})\circ(I+\widehat{P}),$$

donc par la question **(8)**, pour $r \in \left]0, \dfrac{1-\alpha_m}{(1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2)}\gamma_m r_0\right[\subset \left]0, (1-\alpha_m)\gamma_m r_0\right[\subset \left]0, \gamma_m r_0\right[$,

$$\begin{aligned}
\widehat{G}(r) + r &\leqslant (I+\widehat{R})\circ(I+\widehat{F})(r + \widehat{P}(r)) \\
&\leqslant (I+\widehat{R})\circ(I+\widehat{F})(r + \alpha_m r) \\
&\leqslant (I+\widehat{R})\,\underbrace{\big((1+\alpha_m)r + \alpha_m^2(1+\alpha_m)r\big)}_{=(1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2)r} && \textit{car } \widehat{F}(s) \leqslant \gamma_m^m s = \alpha_m^2 s \\
&\leqslant \left((1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2) + \frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}(1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2)\right) r && \textit{car } \widehat{R}(u) \leqslant \frac{\alpha_m}{1-\alpha_m} u \\
&\leqslant r\left(1 + \alpha_m + (1+\alpha_m)\alpha_m^2 + \frac{\alpha_m(1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2)}{1-\alpha_m}\right).
\end{aligned}$$

ce qui montre la première inégalité.
Enfin,

$$\alpha_m + (1+\alpha_m)\alpha_m^2 + \frac{\alpha_m(1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2)}{1-\alpha_m} = \alpha_m \frac{\alpha_m + \alpha_m^2 + 2}{1-\alpha_m} \leqslant 1$$

car $\alpha_m \leqslant \dfrac{1}{5}$ et la fonction $\phi : t \mapsto t\dfrac{t+t^2+2}{1-t}$ est croissante sur $[0,1[$ et $\phi(1/5) = \dfrac{31}{125} \leqslant 1$.

$$\boxed{\widehat{G}(r) \leqslant \left(\alpha_m + (1+\alpha_m)\alpha_m^2 + \frac{\alpha_m(1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2)}{1-\alpha_m}\right) r \leqslant r.}$$

(28) On effectue bien sûr une récurrence sur k. On pose $m_k = 2^k$.
Par récurrence: $F_k \in O_{m_k+1}$, la question **(25)** permet de définir $P_k \in O_{m_k+1}$ (avec F_k au lieu de F) pour $m = 2^k$ puis $G_k \in O_{2m_k+1} = O_{m_{k+1}+1}$ que l'on note F_{k+1} et ainsi de suite.
On a bien $\lambda I + F_{k+1} = (I+P_k)^\dagger \circ (\lambda I + F_k)\circ(I+P_k)$.

On vérifie, en appliquant **(24)** à **(27)**, que si pour tout $r \in [0, r_k]$, $\widehat{F_k}(r) \leqslant r$, alors $\widehat{P_k}(r) \leqslant \alpha_{2^k} r$ et pour $r \in [0, r_{k+1}]$,

$$\widehat{G_k}(r) = \widehat{F_{k+1}}(r) \leqslant r.$$

En particulier, $\widehat{F_k}(r_k) \leqslant r_k$ et $\widehat{P_k}(r_{k+1}) \leqslant \alpha_{2^k} r_{k+1}$.
Il reste à montrer que $\alpha_{2^k} r_{k+1} \leqslant r_k - r_{k+1}$ c'est-à-dire que

$$1 \geqslant \gamma_{2^k} \frac{1 - \alpha_{2^k}}{1 + \alpha_{2^k}^2}$$

ce qui est immédiat.

$$\boxed{\text{On a bien pu construire les suites } (F_k)_k \text{ et } (P_k)_k.}$$

(29) Commençons par remarquer que

$$\lambda I + F_k = h_k^\dagger \circ (\lambda I + F) \circ h_k.$$

- La suite $(r_k)_{k \geqslant 0}$ est décroissante positive donc converge vers $r_\infty \geqslant 0$.

$$\boxed{r_\infty \text{ est bien définie.}}$$

- On a pour $k \geqslant 1$, $h_k = h_{k-1} \circ (I + P_{k-1})$ donc

$$\hat{h}_k \prec \hat{h}_{k-1} \circ \left(I + \hat{P}_{k-1}\right)$$

donc $\hat{h}_k(r_k) \leqslant \hat{h}_{k-1}(r_k + \hat{P}_{k-1}(r_k)) \leqslant \hat{h}_{k-1}(r_k + r_{k-1} - r_k) = \hat{h}_{k-1}(r_{k-1})$.
Ainsi, $\hat{h}_k(r_k) \leqslant \hat{h}_1(r_1) = r_1 + \hat{P}_0(r_1) \leqslant r_1 + r_0 - r_1 = r_0$.
- En particulier $\hat{h}_k(r_\infty) \leqslant \hat{h}_k(r_k) \leqslant r_0$ par monotonie.
Remarquons, point essentiel, que $h_k - h_{k-1} = h_{k-1} \circ (I + P_{k-1}) - h_{k-1} \circ I \in O_{2^{k-1}}$ par **5)** car $P_{k-1} \in O_{1+2^{k-1}}$.
Donc les premiers coefficients de la suite (h_k) se stabilisent, notons $\tilde{h}$ la série telle que $\left[\tilde{h}\right]_{2^k} = [h_k]_{2^k}$

Lemme 4 *$h = \tilde{h}$, et donc $[h_k]_{2^k} = [h]_{2^k}$.*

Alors

$$r_0 \geqslant \hat{h}_k(r_\infty) \geqslant (\hat{h}_k)_{2^k}(r_\infty) = (\hat{h})_{2^k}(r_\infty) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \hat{h}(r_\infty).$$

Ainsi, si $r_\infty > 0$, on peut affirmer que

$$\boxed{\rho(\hat{h}) = \rho(h) \geqslant r_\infty.}$$

Preuve du lemme
On veut par unicité (**19)**) montrer que $\lambda I = \widetilde{h}^\dagger \circ (\lambda I + F) \circ \widetilde{h}$, ou ce qui revient au même que

$$\widetilde{h} \circ (\lambda I) = \lambda \widetilde{h} + F \circ \widetilde{h}.$$

Pour cela, montrons que tout k, $\widetilde{h} \circ (\lambda I) - \lambda \widetilde{h} - F \circ \widetilde{h} \in O_{2^k+1}$. Posons $\widetilde{h} = h_k + r_k$, on a $r_k \in O_{2^k+1}$.
On sait que $\lambda I + F_k = h_k^\dagger \circ (\lambda I + F) \circ h_k$, c'est-à-dire

$$h_k \circ (\lambda I + F_k) - \lambda h_k - F \circ h_k = 0.$$

Or,

$$\widetilde{h} \circ (\lambda I) - \lambda \widetilde{h} - F \circ \widetilde{h} = h_k \circ (\lambda I) - \lambda h_k - F \circ (h_k + r_k) + \underbrace{r_k \circ (\lambda I) - \lambda r_k}_{\in O_{2^k+1} \text{ d'après } \mathbf{(5)}}.$$

Avec l'égalité précédente,

$$\begin{aligned} & h_k \circ (\lambda I) - \lambda h_k - F \circ (h_k + r_k) \\ = \ & \underbrace{h_k \circ (\lambda I) - h_k \circ (\lambda I + F_k)}_{\in O_{2^k+1} \text{ d'après } \mathbf{(5)} \text{ et } F_k \in O_{2^k+1}} + \underbrace{F \circ h_k - F \circ (h_k + r_k)}_{\in O_{2^k+1} \text{ d'après } \mathbf{(5)} \text{ et } F_k \in O_{2^k+1}}, \end{aligned}$$

ce qui achève de prouver que $\tilde{h} \circ (\lambda I) - \lambda \tilde{h} - F \circ \tilde{h} \in O_{2^k+1}$ et donc le lemme.