My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مَمُونِي مُولَاي اسْمَاعِيل

Devoir Maison n° 3

Séries numériques

X 2011

Transformation d'Euler et accélération de la convergence

Dans ce problème, $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbf{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs et $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs. La notation $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

On note E l'espace vectoriel des suites réelles. On note $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle de terme général u_n. On considère l'endomorphisme Δ de E qui à toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ associe la suite de terme général $(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$, $n \in \mathbf{N}$.

On pose, pour k et n dans $\mathbf{N}$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ si $n \geq k$. On convient que $0! = 1$ et que $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

Les candidats vérifieront la convergence des séries qu'ils rencontrent, même si cela n'est pas explicitement demandé.

Première partie : suites complètement monotones

Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on note Δ^p le p-ième itéré de Δ défini par $\Delta^p = \Delta \circ \Delta^{p-1}$, et par convention, Δ^0 est l'identité de E.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *complètement monotone* si pour tous entiers naturels p et n on a

$$(-1)^p\,(\Delta^p u)_n > 0.$$

1. Soit f une fonction sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles et indéfiniment dérivable. On considère la suite de terme général $u_n = f(n)$.

1a. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier n, il existe un réel x dans l'intervalle $]n, n+p[$ tel que

$$(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x).$$

On pourra raisonner par récurrence en considérant la fonction $g(x) = f(x+1) - f(x)$ et la suite de terme général $v_n = g(n)$.

1b. On considère la suite de terme général $a_n = \dfrac{1}{n+1}$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est complètement monotone.

2a. Démontrer que pour tout $p \geq 1$, on a

$$(\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}.$$

2b. Soit $b \in]0,1[$. On considère la suite de terme général $b_n = b^n$. Calculer $(\Delta^p b)_n$ pour tous les entiers naturels n et p et en déduire que $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est complètement monotone.

Soit ω une fonction continue et positive sur $[0,1]$, non identiquement nulle. Jusqu'à la fin de la première partie, on considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \omega(t)\,dt$.

3a. Montrer que la série de terme général $(-1)^k u_k$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\,dt.$$

3b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est complètement monotone.

3c. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\,dt.$$

3d. En déduire que l'on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0.$$

4. Déduire des questions précédentes que

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}.$$

5. On pose $\mathcal{E}_n = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^k \omega(t)\,dt.$

5a. Montrer que

$$\mathcal{E}_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0.$$

5b. On pose $S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$. Montrer que $|S - \mathcal{E}_n| \leq \frac{S}{2^{n+1}}$.

Deuxième partie : Transformée d'Euler

Dans cette partie, on se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série de terme général $(-1)^n u_n$ soit convergente, et l'on note S sa somme. **On ne suppose aucune autre propriété particulière de cette suite** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Le but est de démontrer que

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0.$$

On dit que la série $\sum \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$ est la transformée d'Euler de la série $\sum (-1)^k u_k$.

6a. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a $\lim_{n\to\infty} (\Delta^p u)_n = 0$.

6b. Montrer que pour toute suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite nulle, on a $\lim_{p\to\infty} \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} r_k = 0$.

7a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n \right).$$

7b. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a

$$\frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n \right).$$

8a. On pose $E_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$. Montrer que

$$E_n - S = -\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \left(\sum_{k\geq p} (-1)^k u_k \right).$$

8b. Conclure.

Troisième partie : une amélioration de la méthode

Dans cette partie, comme dans la question 3, on se donne une fonction ω continue et positive sur $[0,1]$, non identiquement nulle. On considère la suite de terme général $u_n = \int_0^1 t^n \omega(t)\,dt$ et on pose

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k.$$

On se donne aussi une suite de polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout n, $P_n(-1) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$T_n = \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{P_n(-1) - P_n(t)}{1+t} \omega(t)\,dt.$$

9a. Montrer que $S - T_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(t)}{P_n(-1)(1+t)} \omega(t)\,dt$.

9b. En déduire que $|S - T_n| \leq \dfrac{SM_n}{|P_n(-1)|}$ où $M_n = \sup\limits_{t\in[0,1]} |P_n(t)|$.

10. Dans cette question, on choisit comme suite de polynômes $P_n(x) = (1-x)^n$. Donner une majoration explicite de $|S - T_n|$, en fonction de S et n.

11. Dans cette question, on choisit comme suite de polynômes $P_n(x) = (1-2x)^n$. Donner une majoration explicite de $|S - T_n|$, en fonction de S et n.

12a. Démontrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant les conditions suivantes : pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\deg P_n = n, \quad P_n(\sin^2 t) = \cos(2nt)$$

12b. Calculer $P_n(-1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

12c. Donner une majoration explicite de $|S - T_n|$.

Quatrième partie : comparaison des méthodes sur un exemple

Dans cette partie, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$, $E_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}$ et $T_n = \dfrac{1}{P_n(-1)} \displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(-1) - P_n(t)}{1+t}\,dt$, où les P_n sont les polynômes de la question **12**.

13. Donner un équivalent de $S - S_n$ et de $S - E_n$. Comparez la vitesse de convergence de T_n avec celle de S_n et E_n. Donner un équivalent de $S - T_n$.

* *
*

Corrigé de l'épreuve X MP 2011, mathématiques B

Partie I : Suites complètement monotones

1a. Soit, pour $p \in \mathbb{N}^*$, l'assertion $(\mathcal{H}_p)$: "pour toute fonction f indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}$ et tout entier naturel n, il existe $x \in]n, n+p[$ tel que $(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x)$." (La suite (u_n) étant définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$).

- Soit f indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$; d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $x \in]n, n+1[$ tel que $(\Delta u)_n = f(n+1) - f(n) = f'(x)$: $(\mathcal{H}_1)$ est donc vraie.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$; supposons $(\mathcal{H}_p)$ vraie ; soit f indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}$. Définissons $g : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \geqslant 0, g(x) = f(x+1) - f(x)$, et la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = g(n)$, *i.e.* $v_n = (\Delta u)_n$. Alors g est indéfiniment dérivable, et en lui appliquant $(\mathcal{H}_p)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y \in]n, n+p[$ tel que

$$(\Delta^{p+1} u)_n = (\Delta^p v)_n = g^{(p)}(y) = f^{(p)}(y+1) - f^{(p)}(y).$$

On peut réappliquer l'égalité des accroissements finis à $f^{(p)}$ (indéfiniment dérivable), et il existe $x \in]y, y+1[\subset]n, n+p+1[$ tel que $f^{(p)}(y+1) - f^{(p)}(y) = f^{(p+1)}(x)$. Il s'ensuit que $(\mathcal{H}_{p+1})$ est vraie, et le résultat requis s'en déduit par récurrence sur p.

1b. La suite (a_n) est associée à la fonction $f : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \geqslant 0, f(x) = \frac{1}{x+1}$. f est indéfiniment dérivable, et une récurrence triviale montre que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 0, f^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}$. En appliquant le **1a.**, il vient :

$$\forall p \geqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in]n, n+p[, (\Delta^p a)_n = \frac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}.$$

Il s'ensuit que $(-1)^p (\Delta^p a)_n = \frac{p!}{(x+1)^{p+1}} > 0$. Comme de plus $\forall n \in \mathbb{N}, (\Delta^0 a)_n = a_n > 0$, il en découle que

$$\boxed{(a_n) \text{ est complètement monotone.}}$$

2a. Notons $T : E \to E$ défini par : $\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, (Tu)_n = u_{n+1}$. C'est un endomorphime de E, et $\Delta = T - id_E$. Comme T et id_E commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \Delta^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} T^k.$$

D'où
$$\boxed{\forall u \in E, \forall p \geqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}, (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}.}$$

Remarque : La formule précédente est vraie aussi pour $p = 0$; observons de plus que, puisque $\forall k \in \mathbb{N}, (-1)^k = (-1)^{-k}$:

$$\forall p \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}, (-1)^p (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} u_{n+k},$$

formule que je noterai (i).

2b. La formule (i) fournit $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2, (-1)^p (\Delta^p b)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} b^{n+k} = b^n (1-b)^p$ (en réappliquant le binôme de Newton au développement de $(1-b)^p$). Comme $b \in]0, 1[$, il s'ensuit que

$$\boxed{(b_n) \text{ est complètement monotone.}}$$

3a. Soit $N \in \mathbb{N}$; on a :

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k u_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{N} (-t)^k \omega(t) \, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \omega(t) \, dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} \omega(t) \, dt.$$

(Somme partielle d'une série géométrique de raison $-t \neq 1$.)

Notons $R_N = \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} \omega(t) \, dt$, et soit $M = \operatorname*{Sup}_{t \in [0,1]} |\omega(t)|$ (bien défini, puisque ω est continue sur le segment $[0, 1]$). Comme pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{1}{1+t} \leqslant 1$, il vient :

$$|R_N| \leqslant M \int_0^1 t^{N+1} \, dt = \frac{M}{N+2}.$$

Il en résulte que $\lim_{N \to +\infty} R_N = 0$: c'est dire que $\boxed{\text{la série numérique } \sum (-1)^k u_k \text{ converge, et } \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} \, dt.}$

Remarque : On peut également invoquer le théorème de convergence dominée, appliqué sur $[0,1[$ à la suite de fonctions $S_N(t) = \sum\limits_{k=0}^{N} (-t)^k \omega(t) = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}\omega(t)$, en observant que $|S_N(t)| \leqslant 2\omega(t)$.

3b. D'après la formule (i) (*cf.* **2.a**), et en utilisant les calculs effectués au **2.b** :

$$\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2, (-1)^p(\Delta^p u)_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \tbinom{p}{k} t^{n+k} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t^n (1-t)^p \omega(t) \, \mathrm{d}t.$$

Cependant $t \mapsto t^n(1-t)^p\omega(t)$ est continue, positive sur $[0,1]$; il en découle que $(-1)^p(\Delta^p u)_n \geqslant 0$, et que si cette quantité était nulle, alors $\forall t \in [0,1], t^n(1-t)^p\omega(t) = 0$. En particulier, on aurait $\forall t \in]0,1[, \omega(t) = 0$ et par continuité : $\forall t \in [0,1], \omega(t) = 0$, ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi : $\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2, (-1)^p(\Delta^p u)_n > 0$ et $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est complètement monotone.}}$

3c. Pour tout $t \in [0,1]$, on peut développer (puisque $0 \leqslant \frac{1-t}{2} \leqslant \frac{1}{2}$) :

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(\frac{1-t}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} (\tfrac{1-t}{2})^p.$$

Définissons donc, pour $p \in \mathbb{N}$: $f_p : [0,1] \to \mathbb{R}$ par : $\forall t \in [0,1], f_p(t) = (\frac{1-t}{2})^p \omega(t)$. Chaque f_p est continue sur $[0,1]$, et on a de plus : $\forall t \in [0,1], |f_p(t)| \leqslant \frac{M}{2^p}$ (avec les notations du **3.a**). Ainsi, la série de fonctions continues $\sum f_p$ converge normalement sur $[0,1]$, et on peut intervertir :

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{p=0}^{+\infty} f_p(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 f_p(t) \, \mathrm{d}t.$$

Compte-tenu du **3.a**, on a bien : $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 (\tfrac{1-t}{2})^p \omega(t) \, \mathrm{d}t.}$

3.d Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on obtient, en développant le binôme $(1-t)^p$ et d'après **2.a** :

$$\int_0^1 (\tfrac{1-t}{2})^p \omega(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \tbinom{p}{k} \int_0^1 t^k \omega(t) \, \mathrm{d}t = \frac{(-1)^p}{2^p}\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \tbinom{p}{k} u_k = \frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_0.$$

D'où, d'après **3.c** : $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0.}$

4. Appliquons ce qui précède à $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par : $\forall t \in [0,1], \omega(t) = 1$ (qui vérifie bien les hypothèses du **3.**) ; ici :

- $\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$,
- $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$,
- $\forall p \in \mathbb{N}, \int_0^1 (\frac{1-t}{2})^p \omega(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 (\frac{1-t}{2})^p \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(p+1)2^p}$ (effectuer le changement de variable $u = 1-t$).

D'parès **3.a** et **3.c** , il vient : $\boxed{\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}.}$

Remarque : La première égalité peut se déduire du développement (D) : $\forall t \in]-1,1[, \ln(1+t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}$, et du fait que cette série de fonctions converge uniformément sur $[0,1]$ (majorer les restes en utilisant le critère spécial des séries alternées) : par continuité de $t \to \ln(1+t)$, (D) reste valable en 1. La seconde égalité revient à appliquer (D) en $\frac{-1}{2}$.

5a. Les calculs faits au **3.d** impliquent l'égalité requise.

5b. D'après ce qui précède (et, toujours, le **3d.**), on a :

$$|S - \mathcal{E}_n| = |\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0| = |\frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{+\infty} \int_0^1 (\tfrac{1-t}{2})^p \omega(t) \, \mathrm{d}t|.$$

Or on a vu que la série de fonctions continues $\sum f_p$ (donc aussi, *a fortiori*, $\sum\limits_{p\geqslant n+1} f_p$) convergeait normalement sur $[0,1]$; il s'ensuit qu'on peut intervertir la série et l'intégrale, et, compte-tenu des calculs du **3.c** :

$$|\frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{+\infty} \int_0^1 (\tfrac{1-t}{2})^p \omega(t) \, \mathrm{d}t| = |\frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{p=n+1}^{+\infty} (\tfrac{1-t}{2})^p \omega(t) \, \mathrm{d}t| = |\frac{1}{2}\int_0^1 (\tfrac{1-t}{2})^{n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} (\tfrac{1-t}{2})^p \omega(t) \, \mathrm{d}t| = |\int_0^1 (\tfrac{1-t}{2})^{n+1} \frac{\omega(t)}{1+t} \, \mathrm{d}t|.$$

Enfin, puisque $\omega \geqslant 0$ et comme $\forall t \in [0,1], 0 \leqslant \frac{1-t}{2} \leqslant \frac{1}{2}$, on peut conclure : $\boxed{|S - \mathcal{E}_n| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} \, \mathrm{d}t = \frac{S}{2^{n+1}}.}$

Partie II : Transformée d'Euler

6a. La série $\sum(-1)^n u_n$ converge, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+k} = 0$. Or, p étant fixé, le $2.a$ fournit : $\forall n \in \mathbb{N}, (\Delta^p u)_n = \sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}$. D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (\Delta^p u)_n = 0.}$

6b. La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc est bornée : notons $R = \operatorname{Sup}\limits_{n\in\mathbb{N}} |r_n|$. Soit $\varepsilon > 0$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, |r_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, pour tout $p \geqslant N_1$, comme $\frac{1}{2^p} \sum\limits_{k=N_1}^{p} \binom{p}{k} \leqslant \frac{1}{2^p} \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} = 1$:

$$\left|\frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} r_k\right| \leqslant \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} |r_k| \leqslant \frac{R}{2^p} \sum_{k=0}^{N_1-1} \binom{p}{k} + \frac{1}{2^p} \sum_{k=N_1}^{p} \binom{p}{k} \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{R}{2^p} \sum_{k=0}^{N_1-1} \binom{p}{k} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, N_1 étant fixé, la fonction $p \mapsto \sum\limits_{k=0}^{N_1-1} \binom{p}{k}$ est polynômiale en p (écrire $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}$), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{R}{2^p} \sum\limits_{k=0}^{N_1-1} \binom{p}{k} = 0$. Ainsi, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant N_2, \left|\frac{R}{2^p} \sum\limits_{k=0}^{N_1-1} \binom{p}{k}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement, pour tout $p \geqslant \operatorname{Max}(N_1, N_2), \left|\frac{1}{2^p} \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} r_k\right| \leqslant \varepsilon$, et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^p} \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} r_k = 0.}$

7a. Soit $N \in \mathbb{N}$; notons

$$S_N = \sum_{p=0}^{N} \left[\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n\right] = \frac{(-1)^0}{2^0} (\Delta^0 u)_n - \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} (\Delta^{N+1} u)_n = u_n - \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} (\Delta^{N+1} u)_n.$$

Le **2a.** permet d'écrire $\frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} (\Delta^{N+1} u)_n = \frac{(-1)^n}{2^{N+1}} \sum\limits_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} (-1)^{n+k} u_{n+k}$. Or on vient de voir au **6a.** que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$: le **6b.** appliqué à la suite $((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fournit alors $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} (\Delta^{N+1} u)_n = 0$; on en déduit que $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = u_n$, c'est-à-dire que la série $\sum\limits_{p\geqslant 0} \left[\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n\right]$ converge, et $\boxed{\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n\right] = u_n.}$

7b. Notons, pour simplifier : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = (\Delta^p u)_n$. Soit $N \in \mathbb{N}$; notons également $\mathcal{U}_N = \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n (2(\Delta^p u)_n + (\Delta^{p+1} u)_n)$ $= \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n (2w_n + (\Delta w)_n)$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, 2w_n + (\Delta w)_n = w_{n+1} + w_n$, on a :

$$\mathcal{U}_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n w_{n+1} + \sum_{n=0}^{N} (-1)^n w_n = \sum_{n=1}^{N+1} (-1)^{n-1} w_n + \sum_{n=0}^{N} (-1)^n w_n = (-1)^N w_{N+1} + w_0.$$

Or, p étant fixé, le **6a.** montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$, donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathcal{U}_N = w_0 = (\Delta^p u)_0$. Il s'ensuit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n\right)$ converge, et $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n\right) = \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0.}$

8a. D'après la question précédente, $E_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_k - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_k\right)$ $= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \sum\limits_{p=0}^{n} \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_k - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_k\right) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(u_k - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (\Delta^{n+1} u)_k\right)$.

Comme $\sum\limits_{k\geqslant 0} (-1)^k u_k$ converge, ce qui précède montre que $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (\Delta^{n+1} u)_k$ aussi, et, d'après **2a.** :

$$E_n - S = \frac{-1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{n+1+k} (\Delta^{n+1} u)_k = \frac{-1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n+1} (-1)^{k+p} \binom{n+1}{p} u_{k+p} = \boxed{\frac{-1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k u_k.}$$

8b. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*, R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$; en tant que reste d'une série convergente, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$. On peut alors appliquer le **6b.** : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum\limits_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} R_p = 0$, d'où aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n - S = 0$, *i.e.* $\boxed{S = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0.}$

Partie III : Une amélioration de la méthode

9a. On a vu au **3a.** que $S = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$, d'où, comme $P_n(-1) \neq 0$: $T_n = \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{P_n(-1)-P_n(t)}{1+t}\omega(t)\,\mathrm{d}t$

$= S - \int_0^1 \frac{P_n(t)}{P_n(-1)(1+t)}\omega(t)\,\mathrm{d}t$, et $\boxed{S - T_n = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{P_n(-1)(1+t)}\omega(t)\,\mathrm{d}t.}$

9b. ω étant positive, pour $M_n = \sup\limits_{t\in[0,1]} |P_n(t)|$, on a $\boxed{|S - T_n| \leqslant M_n \int_0^1 \frac{\omega(t)}{|P_n(-1)|(1+t)}\,\mathrm{d}t = \frac{SM_n}{|P_n(-1)|}.}$

Remarque : Il faut ne pas lire ces questions pour ne pas y répondre ; les deux questions suivantes satisfont d'ailleurs la même condition nécessaire.

10. Ici, immédiatement : $P_n(-1) = 2^n$ et $M_n = 1$, d'où $\boxed{|S - T_n| \leqslant \frac{S}{2^n}.}$

11. Ici $P_n(-1) = 3^n$, et comme $\forall t \in [0,1], -1 \leqslant 1 - 2t \leqslant 1$ et 1 est atteint pour $t = 0$: $M_n = 1$, et $\boxed{|S - T_n| \leqslant \frac{S}{3^n}.}$

12a. Développons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$: $\cos(2nt) = \mathrm{Re}[\exp(2int)] = \mathrm{Re}[(\cos(t)+i\sin(t)]^{2n} = \mathrm{Re}\sum\limits_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}(i\sin(t))^k(\cos(t))^{2n-k}$

$= \sum\limits_{l=0}^{n} \binom{2n}{2l}(-1)^l \sin^{2l}(t)\cos^{2n-2l}(t) = \sum\limits_{l=0}^{n}(-1)^n\binom{2n}{2l}\sin^{2l}(t)(\sin^2(t)-1)^{n-l}.$

Définissons donc $\boxed{P_n(X) = (-1)^n \sum\limits_{l=0}^{n} \binom{2n}{2l} X^l (X-1)^{n-l}.}$

- P_n est un polynôme de degré *a priori* $\leqslant n$, et comme le coefficient en X^n vaut $(-1)^n \sum\limits_{l=0}^{n} \binom{2n}{2l} \neq 0$ (car $\forall l_i n[0,n]\binom{2n}{2l} > 0$), on a bien $\deg P_n = n$.
- En outre, par définition et d'après les calculs précédents : $\forall t \in \mathbb{R}, P_n(\sin^2(t)) = \cos(2nt)$ (relation notée (ii)).
- Enfin, soit Q_n un autre polynôme vérifiant (ii) ; $\sin^2$ étant surjective de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, les deux polynômes Q_n et P_n coïncident sur la partie infinie $[0,1]$, donc sont égaux : d'où l'unicité de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (ii).

12b. Par définition : $P_n(-1) = (-1)^n \sum\limits_{l=0}^{n}\binom{2n}{2l}(-1)^l(-2)^{n-l} = \sum\limits_{l=0}^{n}\binom{2n}{2l}2^{n-l} = \sum\limits_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}(\sqrt{2})^{2p}$ (en posant $p = n - l$, et compte-tenu de $\binom{2n}{2l} = \binom{2n}{2n-2l}$). Posons $a_n = P_n(-1) = \sum\limits_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}(\sqrt{2})^{2p}$, et $b_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{2p+1}(\sqrt{2})^{2p+1}$; il vient :

- $a_n + b_n = \sum\limits_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(\sqrt{2})^k = (1+\sqrt{2})^{2n}$,
- $a_n - b_n = \sum\limits_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-\sqrt{2})^k = (1-\sqrt{2})^{2n} = (\sqrt{2}-1)^{2n}$.

D'où $\boxed{P_n(-1) = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{2}-1)^{2n}].}$

12c. $\sin^2$ étant (une fois de plus) surjective de $\mathbb{R}$ sur $[0,1]$: $\forall x \in [0,1], \exists t \in \mathbb{R}, P_n(x) = P_n(\sin^2(t)) = \cos(2nt)$. D'où $|M_n| \leqslant 1$ (on a même $M_n = 1$, atteint pour $x = 0$), et $\boxed{|S - T_n| \leqslant \frac{2S}{[(1+\sqrt{2})^{2n}+(\sqrt{2}-1)^{2n}]}.}$

Partie IV : Comparaison des méthodes sur un exemple

13. Question ouverte, et intéressante ; notons, pour $n \in \mathbb{N}$: $R_{1,n} = S - S_n, R_{2,n} = S - E_n, R_{3,n} = S - T_n$.

- On peut écrire, d'après le calcul effectué au **3a.** et en posant $u = t^{n+1}$, qui définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1]$ sur $]0,1]$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{1/n+1}}{1+u^{1/n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

Formons alors $g_n :]0,1] \to]0,1]$ définie par : $\forall u \in]0,1], g_n(u) = \frac{u^{1/n+1}}{1+u^{1/n+1}}$. C'est une suite de fonctions continues et intégrables sur $]0,1]$, qui converge simplement vers la fonction constante $\frac{1}{2}$, et telle que $\forall (n,u) \in \mathbb{N}\times]0,1] : |g_n(u)| \leqslant 1$, fonction constante intégrable sur $]0,1]$. Le théorème de convergence dominée s'applique, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(u)\,du = \frac{1}{2}$. D'où

$$\boxed{R_{1,n} = S - S_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n}.}$$

• La même idée peut être appliquée à $R_{2,n} = \int_0^1 (\frac{1-t}{2})^{n+1}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ (*cf.* **5b.**). On a, en posant $v = (1-t)^{n+1}$ ($\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[0,1[$ sur $]0,1]$) :

$$R_{2,n} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\int_0^1 \frac{v^{1/n+1}}{2-v^{1/n+1}}dv.$$

On forme, de même, $h_n :]0,1] \to]0,1]$ définie par $\forall v \in]0,1], h_n(v) = \frac{v^{1/n+1}}{2-v^{1/n+1}}$: (h_n) est une suite de fonctions continues intégrables sur $]0,1]$, qui converge simplement vers 1, et telle que $\forall (n,v) \in \mathbb{N}\times]0,1], |h_n(v)| \leqslant 1$. D'après le théorème de convergence dominée : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(v)dv = 1$, et donc $\boxed{R_{2,n} = S - E_n \sim \frac{1}{n2^{n+1}}.}$

• Comme $0 < \sqrt{2}-1 < 1 < \sqrt{2}+1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2}-1)^{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2}+1)^{2n} = +\infty$; de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n2^{n+1}}{(\sqrt{2}+1)^{2n}} = 0$. Il s'ensuit, en utilisant **12c.** et ce qui précède, que

$$|S - T_n| \leqslant \frac{2S}{[(1+\sqrt{2})^{2n}+(\sqrt{2}-1)^{2n}]} \sim \frac{2S}{[(1+\sqrt{2})^{2n}} = o(S - E_n).$$

$$\boxed{(T_n) \text{ converge donc plus rapidement que } (S_n) \text{ ou } (E_n).}$$

• Reste à obtenir un équivalent de $S - T_n$; pour ce faire, on écrit, en posant $t = \sin^2 u$ ($\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,\frac{\pi}{2}[$ sur $]0,1[$), puis $v = 2u$:

$$P_n(-1)(S - T_n) = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(2nu)\sin(u)\cos(u)}{1+\sin^2(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\frac{\cos(2nu)\sin(2u)}{3-\cos(2u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi}\frac{\cos(nv)\sin(v)}{3-\cos(v)}dv.$$

On forme enfin $F : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall v \in [0,\pi], F(v) = \frac{\sin(v)}{3-\cos(v)}$. F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi]$, et, en effectuant une triple intégration par parties, $\forall n \geqslant 1$:
$\int_0^\pi \cos(nv)F(v)dv = [\frac{\sin(nv)F(v)}{n}]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nv)F'(v)}{n}dv = -\int_0^\pi \frac{\sin(nv)F'(v)}{n}dv = [\frac{\cos(nv)F'(v)}{n^2}]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos(nv)F''(v)}{n^2}dv = [\frac{\cos(nv)F'(v)}{n^2}]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin(nv)F^{(3)}(v)}{n^3}dv.$
Cependant $\forall v \in [0,\pi]$: $F'(v) = \frac{3\cos(v)-1}{(3-\cos(v))^2}$, et $[\frac{\cos(nv)F'(v)}{n^2}]_0^\pi = \frac{(-1)^nF'(\pi)-F'(0)}{n^2} = -\frac{2+(-1)^n}{4n^2}$. En outre, en notant $M_3 = \operatorname*{Sup}_{v\in[0,\pi]}|F^{(3)}(v)|$, on a $|\int_0^\pi \frac{\sin(nv)F^{(3)}(v)}{n^3}dv| \leqslant \frac{\pi M_3}{n^3} = o(\frac{2+(-1)^n}{4n^2})$,

d'où finalement $\boxed{S - T_n \sim -P_n(-1)\frac{2+(-1)^n}{4n^2} \sim -\frac{2+(-1)^n}{2n^2(\sqrt{2}+1)^{2n}}.}$

Pour toute remarque ou suggestion concernant ce corrigé, contacter denis.favennec@prepas.org.