

Suites et Séries ctions

Devoir Maison N°3 : X 2023

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif.

- On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel normé est relativement compacte si elle est incluse dans un compact.
- Sur $\mathbb{R}^d$, on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel, défini par $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ pour tous $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$. On notera également $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire.
- Pour $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact, on note $C(K, \mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}^d$ que l'on munit de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\|$.
- On dit qu'une partie A de $C(K, \mathbb{R}^d)$ est équicontinue en $x \in K$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \text{ tel que } \forall f \in A, \forall y \in B(x, r), \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

où $B(x, r)$ désigne la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ centrée en x et de rayon r .

On dit que A est équicontinue si elle est équicontinue en tout point $x \in K$.

On s'intéresse dans tout le sujet au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = F(y(t)) \\ y(0) = y_{init} \end{cases} \quad (1)$$

avec F une fonction sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $y_{init} \in \Omega$.

On dit que ce problème de Cauchy admet une solution si il existe $T \in]0, +\infty]$ et une fonction $\phi : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^d$ dérivable telle que $\phi(0) = y_{init}$, $\phi([0, T[) \subset \Omega$ et vérifiant $\phi'(t) = F(\phi(t))$ pour tout $t \in [0, T[$. On dit que (ϕ, T) est une solution du problème de Cauchy.

On dira que (ϕ, T) est une solution maximale du problème de Cauchy (1), si (ϕ, T) est une solution et s'il n'existe pas de solution (ψ, T') qui vérifie $T < T'$ et $\forall t \in [0, T[, \psi(t) = \phi(t)$. Si $T = +\infty$ on dira que ϕ est une solution globale.

Dans tout le sujet on admet que **toute solution peut-être prolongée en solution maximale**.

Les parties I et II sont indépendantes, la partie IV est indépendante des autres parties.

I - PREMIERS EXEMPLES

Dans cette partie, on admet que toutes les équations proposées admettent une unique solution et que celle-ci est globale. De plus on considère uniquement le cas $d = 1$. Soient $a, \theta > 0$ et $0 < y_{init} < \theta$.

1. On considère le problème de Cauchy associé à F_0 définie par :

$$\forall y \in]0, +\infty[, \quad F_0(y) = ay \ln \left(\frac{\theta}{y} \right).$$

On note ϕ_0 la solution de ce problème sur $[0, +\infty[$.

- (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \varepsilon]$ on a $y_{init} < \phi_0(t) < \theta$.
 - (b) En considérant la fonction $z_0(t) = \ln(\phi_0(t)/\theta)$ trouver l'expression de ϕ_0 .
 - (c) En déduire que ϕ_0 vérifie $y_{init} < \phi_0(t) < \theta$ pour tout $t \in]0, +\infty[$ et que de plus ϕ_0 est strictement croissante.
2. Pour $0 < \mu \leq 1$, on considère F_μ définie par :

$$\forall y \in]0, +\infty[, \quad F_\mu(y) = \frac{a}{\mu} y \left(1 - \left(\frac{y}{\theta} \right)^\mu \right).$$

En considérant la fonction $z_\mu(t) = \phi_\mu(t)^{-\mu}$ trouver l'expression de la solution ϕ_μ sur $[0, +\infty[$ associée à F_μ .

3. (a) Montrer que F_μ converge simplement vers F_0 lorsque μ tend vers 0.
- (b) Montrer que ϕ_μ converge simplement vers ϕ_0 lorsque μ tend vers 0.

II - UN THÉORÈME DE COMPACTITÉ

Dans cette section, on considère K un compact de $\mathbb{R}$. On rappelle que l'espace vectoriel $C(K, \mathbb{R}^d)$ est muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

1. Soit $k > 0$ et B l'ensemble des fonctions de K dans $\mathbb{R}^d$ qui sont k -lipschitziennes. Montrer que B est équicontinue.

Soit A une partie de $C(K, \mathbb{R}^d)$. On cherche à montrer dans la suite de cette partie le théorème suivant :

Théorème 1 : Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (P1) A est relativement compacte.
- (P2) A est équicontinue et pour tout $x \in K$, l'ensemble $A(x) = \{f(x) \mid f \in A\}$ est borné.

2. Montrer qu'une partie $A \subset C(K, \mathbb{R}^d)$ est relativement compacte si et seulement si toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge uniformément vers une limite $f \in C(K, \mathbb{R}^d)$.
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que si A est relativement compacte alors A est équicontinue.
4. Montrer que $(P1) \Rightarrow (P2)$.

On suppose maintenant que A vérifie $(P2)$. On considère $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A .

5. Soit $(x_p)_{p \geq 0}$ une suite d'éléments de K .
 - (a) Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $p \geq 0$, $f_{\psi_p(n)}(x_p)$ converge lorsque n tend vers l'infini avec $\psi_0 = \varphi_0$ et $\psi_p = \psi_{p-1} \circ \varphi_p$ pour $p \geq 1$.
 - (b) Montrer que pour tout $p \geq 0$, $f_{\psi_p(n)}(x_p)$ converge lorsque n tend vers l'infini.
6. (a) Montrer que l'on peut extraire de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge simplement sur $\mathbb{Q} \cap K$. On notera $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cette extraction.
 - (b) Pour $x \in K$, montrer que $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence notée $g(x)$ et conclure sur la convergence simple de la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur K vers g .
7. (a) Montrer que g est continue sur K .
 - (b) Montrer que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur K . (*Indication : on pourra raisonner par l'absurde.*)
 - (c) En déduire que $(P2) \Rightarrow (P1)$.

III - EXISTENCE DE SOLUTIONS

On considère dans cette partie que la fonction F est continue et $y_{init} \in \Omega$. Pour tout $r \geq 0$, on note B_r la boule fermée de centre y_{init} et de rayon r .

1. Montrer que l'on peut choisir $r > 0$ et $T > 0$ tels que $B_r \subset \Omega$ et tels que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on puisse définir par récurrence, en posant $\Delta t = \frac{T}{N}$, une suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ à valeurs dans B_r telle que :

$$y_0 = y_{init}, \quad y_{n+1} = y_n + \Delta t F(y_n), \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}.$$

2. Montrer alors que l'on peut construire une unique fonction ϕ_N continue sur $[0, T]$, affine sur chaque intervalle $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$ et telle que $\phi_N(n\Delta t) = y_n$ pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$.

3. Montrer, à l'aide du *Théorème 1*, qu'il existe une sous-suite de ϕ_N qui converge uniformément sur $[0, T]$ vers une fonction continue ϕ .
4. Montrer que l'on peut définir une suite de fonctions en escalier $\psi_N : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $\psi_N(t) = \phi_N(t)$ pour $t \in \{n\Delta t \mid n \in \{0, \dots, N\}\}$ et telle que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \phi_N(t) = y_{init} + \int_0^t F(\psi_N(s))ds \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

On précisera l'expression des fonctions ψ_N .

5. En déduire qu'il existe une sous-suite de ψ_N qui converge uniformément sur $[0, T]$ et préciser sa limite.
6. Montrer que (ϕ, T) est solution du problème de Cauchy (1) et en déduire le théorème suivant :

Théorème 2 : Si F est une fonction continue, alors il existe au moins une solution du problème de Cauchy (1).

7. On considère le cas particulier pour $d = 1$ donné pour tout $y \in \mathbb{R}$ par $F(y) = 3|y|^{2/3}$ et $y_{init} = 0$. Montrer que ce problème de Cauchy admet une infinité de solutions globales.

IV - INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES

On s'intéresse maintenant à une extension du problème de Cauchy (1). On considère cette fois $\mathcal{F} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$ des parties compactes de $\mathbb{R}^d$. On considère alors le problème d'inclusion différentielle défini par :

$$\begin{cases} y'(t) \in \mathcal{F}(y(t)) \\ y(0) = y_{init} \end{cases} \quad (2)$$

On s'intéresse aux solutions de ce problème qui sont continues et C^1 par morceaux. Pour $T \in]0, +\infty]$, on dira que (ϕ, T) est une solution de (2) si il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $0 = t_0 < \dots < t_N = T$ tels que :

- (i) ϕ est continue sur $[0, T[$.
- (ii) Pour tout $i \in \{0, \dots, N-1\}$, ϕ soit C^1 sur $]t_i, t_{i+1}[$ et ϕ' admette une limite à droite en t_i et si $i \neq 0$ une limite à gauche en t_i .
- (iii) Pour tout $i \in \{0, \dots, N-1\}$ et tout $t \in]t_i, t_{i+1}[$, on a $\phi'(t) \in \mathcal{F}(\phi(t))$.
- (iv) Pour tout $i \in \{0, \dots, N-1\}$, $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \phi'(t) \in \mathcal{F}(\phi(t_i))$ et si $i \neq 0$, $\lim_{t \rightarrow t_i^-} \phi'(t) \in \mathcal{F}(\phi(t_i))$.
- (v) $\phi(0) = y_{init}$.

On utilisera comme dans le cas du problème (1) les notions de solutions maximales et globales.

1. Montrer que si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, il existe $C_K > 0$ telle que $\mathcal{F}$ vérifie :

$$\forall x, y \in K, \forall v_x \in \mathcal{F}(x), \forall v_y \in \mathcal{F}(y), \quad \langle v_x - v_y, x - y \rangle \leq C_K \|x - y\|^2 \quad (3)$$

alors, le problème (2) admet au plus une solution maximale. (*Indication : On pourra regarder $\|X(t) - Y(t)\|^2$ pour X et Y deux solutions*)

Dans toute la suite, on considère le problème d'inclusion différentielle donné par $d = 2$ et $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$ définie pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} \{v^-\} & \text{si } x_1 < 0 \\ \{v^+\} & \text{si } x_1 > 0, \\ [v_1^+, v_1^-] \times [v_2^+, v_2^-] & \text{si } x_1 = 0 \end{cases}$$

où $v^- = (v_1^-, v_2^-) \in \mathbb{R}^2$ et $v^+ = (v_1^+, v_2^+) \in \mathbb{R}^2$ avec $v_1^- \geq v_1^+$ et $v_2^- \geq v_2^+$.

2. On pose $v^- = (1, 2)$ et $v^+ = (-1, 2)$.

(a) Montrer que $\mathcal{F}$ vérifie la condition (3).

(b) On choisit $y_{init} = (0, 0)$. Trouver toutes les solutions maximales du problème (2).

(c) On choisit $y_{init} = (1, 0)$. Trouver toutes les solutions maximales du problème (2).

3. On pose $v^- = (0, 1)$ et $v^+ = (1, 1)$.

(a) Montrer que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas la condition (3).

(b) On choisit $y_{init} = (1, 0)$. Trouver toutes les solutions maximales du problème (2).

(c) On choisit $y_{init} = (0, 0)$. Trouver toutes les solutions maximales du problème (2).

ENS Maths C 2023 MP

un corrigé

Vous pouvez, pour me signaler toute erreur de ma part ou bien me faire part d'une manière plus simple de traiter une certaine question, me contacter par mail à l'adresse : toky7hansen2004@gmail.com.

Partie I – Premiers exemples

1. (a) Par hypothèse, ϕ_0 est solution globale du problème de Cauchy associé à F_0 . En particulier, $F_0(\phi_0(t))$ devant exister pour tout $t \geq 0$, on a $\phi_0 > 0$ sur $[0, +\infty[$ ainsi que :

$$\begin{cases} \phi_0(0) = y_{\text{init}} & \text{(i)} \\ \forall t \geq 0, \quad \phi'_0(t) = F_0(\phi_0(t)) = a\phi_0(t) \ln\left(\frac{\theta}{\phi_0(t)}\right) & \text{(ii)} \end{cases}$$

Puisque ϕ_0 est dérivable donc continue sur $[0, +\infty[$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\forall t \in [0, \varepsilon_1]$, $|\phi_0(t) - \phi_0(0)| \leq \frac{\theta - y_{\text{init}}}{2}$, quantité strictement positive. Ainsi,

$$\forall t \in]0, \varepsilon_1], \quad \phi_0(t) \leq \phi_0(0) + \frac{\theta - y_{\text{init}}}{2} < y_{\text{init}} + (\theta - y_{\text{init}}) = \theta$$

D'autre part, (ii) montre, F_0 étant continue par opérations usuelles sur des fonctions usuelles, que ϕ_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi, étant donné que $\phi'_0(0) = ay_{\text{init}} \ln\left(\frac{\theta}{y_{\text{init}}}\right) > 0$ (car $0 < y_{\text{init}} < \theta$ et $a > 0$), il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que $\forall t \in [0, \varepsilon_2]$, $\phi'_0(t) > 0$. Alors,

$$\forall t \in]0, \varepsilon_2], \quad \phi_0(t) = \phi_0(0) + \int_0^t \phi'_0(u) du = y_{\text{init}} + \int_0^t \phi'_0(u) du > y_{\text{init}}$$

puisque $t > 0$ et par positivité stricte de l'intégrale. En posant alors $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, on a bien $\forall t \in]0, \varepsilon]$, $y_{\text{init}} < \phi_0(t) < \theta$.

- (b) On a justifié à la question précédente la stricte positivité de ϕ_0 sur $[0, +\infty[$, ce qui nous permet de considérer la fonction :

$$z_0 : \begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \ln\left(\frac{\phi_0(t)}{\theta}\right) \end{cases}$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ par composition. Alors :

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_0(t) = \theta e^{z_0(t)} \quad \text{et} \quad \phi'_0(t) = \theta z'_0(t) e^{z_0(t)}$$

donc puisque ϕ_0 est solution de (1), on a pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \theta z'_0(t) e^{z_0(t)} &= F_0(\phi_0(t)) = a\theta e^{z_0(t)} \ln\left(\frac{\phi_0(t)}{\theta}\right) = -a\theta z_0(t) e^{z_0(t)} \\ \text{soit} \quad z'_0(t) &= -az_0(t) \end{aligned}$$

D'où $\forall t \in [0, +\infty[$, $z_0(t) = z_0(0)e^{-at} = \ln\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right)e^{-at}$ et :

$$\phi_0(t) = \theta \exp\left(e^{-at} \ln\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right)\right) = \theta \left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right)^{e^{-at}}$$

- (c) On a alors :

$$\phi'_0(t) = -ae^{-at} \ln\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right) \cdot \theta \exp\left(e^{-at} \ln\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right)\right) = -a\theta \ln\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right) e^{-at} \left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right)^{e^{-at}} > 0$$

puisque $a, \theta > 0$ et $0 < y_{\text{init}} < \theta$, i.e. $\ln\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right) < 0$. De plus :

$$\begin{cases} \phi_0(0) = y_{\text{init}} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_0(t) = \theta \end{cases} \quad \text{d'après son expression établie en b)}$$

ϕ_0 est donc continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc par le théorème de la bijection et d'après les limites ci-dessus, elle est bijective de $[0, +\infty[$ sur $[y_{\text{init}}, \theta]$. En particulier, $\forall t > 0$, $y_{\text{init}} = \phi_0(0) < \phi_0(t) < \theta$.

2. Soit ϕ_μ la solution de (1) associée à F_μ sur $[0, +\infty[$ (dont on admet encore une fois qu'elle existe, et donc qu'elle est positive dans le cas $0 < \mu < 1$, ce qui justifie la suite). On pose :

$$z_\mu : \begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \phi_\mu(t)^{-\mu} \end{cases}$$

Comme précédemment, $z_\mu \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et :

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_\mu(t) = z_\mu(t)^{-1/\mu} \quad \text{donc} \quad \phi'_\mu(t) = -\frac{1}{\mu} z_\mu(t)^{-\frac{1}{\mu}-1} z'_\mu(t)$$

D'où, pour tout $t \geq 0$,

$$-\frac{1}{\mu} z_\mu(t)^{-\frac{1}{\mu}-1} z'_\mu(t) = \frac{a}{\mu} z_\mu(t)^{-1/\mu} \left(1 - \left(\frac{z_\mu(t)^{-1/\mu}}{\theta} \right)^\mu \right)$$

$$\text{soit} \quad z'_\mu(t) = -a z_\mu(t) \left(1 - \frac{1}{\theta^\mu z_\mu(t)} \right) = -a z_\mu(t) + \frac{a}{\theta^\mu}$$

Cette équation différentielle admet entre autres $t \mapsto 1/\theta^\mu$ comme solution particulière constante, donc par linéarité, on obtient l'existence de $C \in \mathbb{R}$ telle que l'on ait $\forall t \geq 0$, $z_\mu(t) = C e^{-at} + 1/\theta^\mu$. Or, $z_\mu(0) = C + 1/\theta^\mu = y_{\text{init}}^{-\mu}$, donc $C = y_{\text{init}}^{-\mu} - \theta^{-\mu}$ et :

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_\mu(t) = \left(\left(y_{\text{init}}^{-\mu} - \theta^{-\mu} \right) e^{-at} + \theta^{-\mu} \right)^{-1/\mu} = \theta \left(1 + e^{-at} \left(\frac{\theta^\mu}{y_{\text{init}}^\mu} - 1 \right) \right)^{-1/\mu}$$

3. (a) Soit $y \in]0, +\infty[$. Pour tout $\mu \in]0, 1]$,

$$F_\mu(y) = \frac{a}{\mu} y \left(1 - \left(\frac{y}{\theta} \right)^\mu \right) = \frac{a}{\mu} y \left(1 - e^{\mu \ln(y/\theta)} \right) = a y \ln \left(\frac{\theta}{y} \right) \frac{1 - e^{\mu \ln(\theta/y)}}{\mu \ln \left(\frac{\theta}{y} \right)} \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} a y \ln \left(\frac{\theta}{y} \right) = F_0(y)$$

car $\frac{e^u - 1}{u} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} 1$ et $\mu \ln \left(\frac{\theta}{y} \right) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0$. Ainsi, F_μ converge simplement vers F_0 lorsque $\mu \rightarrow 0$.

- (b) Soit $t \in [0, +\infty[$. On a, d'après la question 2. :

$$\phi_\mu(t) = \theta \exp \left(-\frac{1}{\mu} \ln \left(1 + e^{-at} \left(\frac{\theta^\mu}{y_{\text{init}}^\mu} - 1 \right) \right) \right)$$

Or,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu} \ln \left(1 + e^{-at} \left(\frac{\theta^\mu}{y_{\text{init}}^\mu} - 1 \right) \right) &\underset{\mu \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\mu} e^{-at} \left(\frac{\theta^\mu}{y_{\text{init}}^\mu} - 1 \right) \quad \text{car} \quad \frac{\theta^\mu}{y_{\text{init}}^\mu} - 1 \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0 \\ &\sim -\frac{1}{\mu} e^{-at} \left(e^{\mu \ln(\theta/y_{\text{init}})} - 1 \right) \\ &\sim -\frac{1}{\mu} e^{-at} \mu \ln \left(\frac{\theta}{y_{\text{init}}} \right) \quad \text{car} \quad \mu \ln \left(\frac{\theta}{y_{\text{init}}} \right) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0 \\ &\sim e^{-at} \ln \left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta} \right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \phi_\mu(t) = \theta \exp \left(e^{-at} \ln \left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta} \right) \right) = \theta \left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta} \right)^{e^{-at}} = \phi_0(t)$$

ce qui donne la convergence simple de ϕ_μ vers ϕ_0 quand $\mu \rightarrow 0$.

Partie II - Un théorème de compacité

1. Soit $\varepsilon > 0$; prenons $r = \frac{\varepsilon}{k}$. Alors, pour toute fonction $f \in B$ et tout $x \in K$, on a :

$$\forall y \in B(x, r), \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k|x - y| < kr = \varepsilon$$

On en déduit que B est bien équicontinue.

2. ($\Rightarrow$) : Supposons $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ relativement compacte : il existe $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ un compact tel que $A \subset \mathcal{K}$. Alors, pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, on a en particulier $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ donc par compacité de $\mathcal{K}$ dans $(\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\infty})$, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{K} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ telles que :

$$\|f_{\varphi(n)} - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet bien une sous-suite qui converge uniformément vers une limite $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$.

($\Leftarrow$) : Supposons, réciproquement, que toute suite d'éléments de A admette une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ pour $\|\cdot\|_{\infty}$. Montrons que $\bar{A}$, l'adhérence de A , est compacte.

Soit $(g_N)_{N \in \mathbb{N}} \in \bar{A}^{\mathbb{N}}$: par définition, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $(f_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n^{(N)} - g_N\|_{\infty} = 0$. Alors :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n_N \in \mathbb{N} / \|f_{n_N}^{(N)} - g_N\|_{\infty} \leq \frac{1}{2N}$$

Puisque $(f_{n_N}^{(N)})_{N \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, on peut trouver $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une extractrice et $h \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ telles que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f_{\varphi(N)}^{(\varphi(N))} - h\|_{\infty} = 0$$

Il nous suffit de vérifier que $(g_{\varphi(N)})_{N \in \mathbb{N}}$ converge aussi uniformément vers h , pour en conclure que $(g_N)_{N \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence (qui est bien dans $\bar{A}$ en tant que limite de $(f_{\varphi(N)}^{(\varphi(N))})_{N \in \mathbb{N}}$). Or, c'est le cas puisque pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|g_{\varphi(N)} - h\|_{\infty} \leq \|g_{\varphi(N)} - f_{\varphi(N)}^{(\varphi(N))}\|_{\infty} + \|f_{\varphi(N)}^{(\varphi(N))} - h\|_{\infty} \leq \frac{1}{2^{\varphi(N)}} + \|f_{\varphi(N)}^{(\varphi(N))} - h\|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

puisque, φ étant strictement croissante, $\varphi(N) \geq N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Donc, $\bar{A}$ est compacte et puisque $A \subset \bar{A}$, A est relativement compacte.

3. Montrons le résultat demandé par contraposée. On suppose donc A non équicontinue, ainsi :

$$\exists x_0 \in K, \exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tels que : } \forall r > 0, \exists f \in A \text{ et } y \in B(x_0, r) / \|f(x_0) - f(y)\| > \varepsilon_0$$

Fixons de tels $x_0 \in K$ et $\varepsilon_0 > 0$. En appliquant la proposition précédente à $r = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in B(x_0, \frac{1}{2^n}) \text{ et } \|f_n(x_0) - f_n(y_n)\| > \varepsilon_0 \quad (\text{i})$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une extractrice pour laquelle $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente pour $\|\cdot\|_{\infty}$, de limite une certaine fonction $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ (ii). Alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_{\varphi(n)}(x_0) - f_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)})\| \leq \|f_{\varphi(n)}(x_0) - f(x_0)\| + \|f(x_0) - f(y_{\varphi(n)})\| + \|f(y_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)})\|$$

Par l'hypothèse (ii), il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, \|f_{\varphi(n)} - f\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$.

De plus, f étant continue en x_0 , il existe $\eta > 0$ tel que $\forall y \in B(x_0, \eta), \|f(x_0) - f(y)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$. Or, puisque $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2, \frac{1}{2^{\varphi(n)}} \leq \frac{1}{2^n} \leq \eta$ et donc $y_{\varphi(n)} \in B(x_0, \frac{1}{2^{\varphi(n)}}) \subset B(x_0, \eta)$.

Alors,

$$\forall n \geq N := \max(N_1, N_2), \|f_{\varphi(n)}(x_0) - f_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)})\| \leq 2\frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} = \varepsilon_0$$

ce qui contredit (i).

On a donc exhibé une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont on a montré qu'elle n'admet aucune sous-suite convergente dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$, ce qui montre, compte tenu de la question précédente, que A n'est pas relativement compacte.

4. Soit $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ vérifiant (P1), c'est-à-dire relativement compacte. D'après la question précédente, A est équicontinue ; il reste à montrer que pour tout $x \in K$, $A(x) = \{f(x) \mid f \in A\}$ est borné.

Considérons donc $x \in K$ et supposons par l'absurde que $A(x)$ est non borné. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in A$ telle que $\|f_n(x)\| \geq n$. Par la caractérisation de la compacité relative établie en question 2, et puisque A est relativement compacte, il existe φ une extractrice telle que $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$. En notant f la limite uniforme, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_{\varphi(n)}\|_{\infty} \leq \|f_{\varphi(n)} - f\|_{\infty} + \|f\|_{\infty}$$

avec $(\|f_{\varphi(n)} - f\|_{\infty})_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0, donc bornée.

Ainsi, $(\|f_{\varphi(n)}\|_{\infty})_{n \in \mathbb{N}}$ est également bornée. Or, on a également :

$$\|f_{\varphi(n)}\|_{\infty} \geq \|f_{\varphi(n)}(x)\| \geq \varphi(n) \geq n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

ce qui fournit une contradiction : $A(x)$ est donc borné, donc vérifie finalement (P2).

Conclusion : on a bien (P1) $\Rightarrow$ (P2).

5. (a) Construisons par récurrence une suite d'extractrices $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall p \geq 0, (f_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(n)}(x_p))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

• On a $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}} \in A(x_0)^{\mathbb{N}}$. Or, $A(x_0)$ étant borné par hypothèse puisque A vérifie (P2), il existe $r > 0$ tel que $A(x) \subset B(0, r)$, qui est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^d$, donc compacte comme on est en dimension finie. Ainsi, $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{B(0, r)}^{\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, i.e. il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $(f_{\varphi_0(n)}(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

• Supposons la suite (φ_p) construite jusqu'au rang $q \in \mathbb{N}$. En notant $\psi_q := \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_q$, $(f_{\psi_q(n)}(x_{q+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $A(x_{q+1})$ qui est borné, donc par le même argument qu'au-dessus, il existe $\varphi_{q+1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\psi_q \circ \varphi_{q+1}(n)}(x_{q+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On a donc construit le terme suivant.

En notant posant alors :

$$\begin{cases} \psi_0 = \varphi_0 \\ \forall p \geq 1, \quad \psi_p = \psi_{p-1} \circ \varphi_p \end{cases}$$

on a bien le résultat voulu.

- (b) Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose :

$$\chi_p : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto \begin{cases} n & \text{si } n \leq p \\ \varphi_{p+1} \circ \dots \circ \varphi_n(n) & \text{si } n > p \end{cases} \end{cases}$$

Montrons que c'est bien une extractrice, c'est-à-dire qu'elle est strictement croissante. Elle l'est sur $\llbracket 0, p \rrbracket$ puisqu'elle y coïncide avec $\text{Id}_{\mathbb{N}}$, ainsi que sur $\llbracket p+1, +\infty \rrbracket$: en effet, chaque φ_k étant strictement croissante, donc toute composée de ces fonctions également, on a

$$\begin{aligned} \forall n \geq p+1, \quad \chi_p(n+1) &= \varphi_{p+1} \circ \dots \circ \varphi_n \circ \varphi_{n+1}(n+1) \\ &\geq \varphi_{p+1} \circ \dots \circ \varphi_n(n+1) \quad \text{car } \varphi_{n+1}(n+1) \geq n+1 \\ &> \varphi_{p+1} \circ \dots \circ \varphi_n(n) \\ &= \chi_p(n) \end{aligned}$$

Enfin, $\chi_p(p+1) = \varphi_{p+1}(p+1) \geq p+1 > p = \chi_p(p)$.

On peut donc considérer la suite extraite $(f_{\psi_p \circ \chi_p(n)}(x_p))_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(f_{\psi_p(n)}(x_p))_{n \in \mathbb{N}}$, convergente d'après la question précédente. Or,

$$\forall n \geq p+1, \quad f_{\psi_p \circ \chi_p(n)}(x_p) = f_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p \circ \varphi_{p+1} \circ \dots \circ \varphi_n(n)}(x_p) = f_{\psi_n(n)}(x_p)$$

Puisque $(f_{\psi_p \circ \chi_p(n)}(x_p))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en tant que sous-suite d'une suite convergente, $(f_{\psi_n(n)}(x_p))_{n \in \mathbb{N}}$ aussi.

6. (a) $\mathbb{Q} \cap K \subset \mathbb{Q}$ est dénombrable donc l'on peut considérer $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap K$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap K$ ainsi que $(x_p)_{p \in \mathbb{N}} := (\theta(p))_{p \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, de sorte qu'en conservant les notations de la question 5.(b), $(f_{\psi_n(n)}(x_p))_{n \in \mathbb{N}}$ admette pour tout $p \in \mathbb{N}$ une limite que l'on note $f(p)$. Ainsi,

$$\forall y \in \mathbb{Q} \cap K, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\psi_n(n)}(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\psi_n(n)}(x_{\theta^{-1}(y)}) = f(\theta^{-1}(y))$$

ce qui montre que l'extraction $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} := (f_{\psi_n(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{Q} \cap K$.

- (b) Si $x \in \mathbb{Q} \cap K$, la question précédente montre que la suite $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $g(x) \in \mathbb{R}^d$, qui est alors son unique valeur d'adhérence. Traitons maintenant le cas où $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap K$.

On a, puisque la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ initialement considérée est une suite d'éléments de A , $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \in A(x)^{\mathbb{N}}$, donc c'est une suite bornée dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^d$. Comme déjà précisé en 5.(a), elle admet alors une valeur d'adhérence $\ell \in \mathbb{R}^d$ associée à une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, d'où l'existence.

Pour l'unicité, supposons que $\ell' \in \mathbb{R}^d$ soit une autre valeur d'adhérence de $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ et notons $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une extractrice correspondante. Montrons que $\ell' = \ell$: soit $\varepsilon > 0$.

Comme A est équicontinue, en particulier équicontinue en x , il existe $r > 0$ tel que $\forall f \in A, \forall y \in B(x, r) \cap K, \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Par densité de $\mathbb{Q} \cap K$ dans K , il existe $y_0 \in \mathbb{Q} \cap K$ tel que $|x - y_0| < r$, i.e. $y_0 \in B(x, r)$. D'autre part, comme $y_0 \in \mathbb{Q} \cap K$, $g_n(y_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(y_0)$ et il en est de même pour ses suites extraites, d'où :

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N} / \quad \forall n \geq N_1, \quad \|g_{\varphi(n)}(y_0) - g(y_0)\| &\leq \frac{\varepsilon}{4} \\ \exists N_2 \in \mathbb{N} / \quad \forall n \geq N_2, \quad \|g_{\psi(n)}(y_0) - g(y_0)\| &\leq \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

On a alors, pour tout $n \geq N = \max(N_1, N_2)$,

$$\begin{aligned} \|g_{\varphi(n)}(x) - g_{\psi(n)}(x)\| &\leq \|g_{\varphi(n)}(x) - g_{\varphi(n)}(y_0)\| + \|g_{\varphi(n)}(y_0) - g(y_0)\| \\ &\quad + \|g(y_0) - g_{\psi(n)}(y_0)\| + \|g_{\psi(n)}(y_0) - g_{\psi(n)}(x)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{car } g_{\varphi(n)}, g_{\psi(n)} \in A \text{ et } y_0 \in B(x, r) \cap K \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_{\varphi(n)}(x) - g_{\psi(n)}(x) = \ell - \ell' = 0$, soit $\ell' = \ell$.

Donc, pour tout $x \in K$, $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence $g(x)$; comme c'est une suite d'éléments de $A(x)$, donc bornée i.e. à valeurs dans un compact, et qu'elle a une unique valeur d'adhérence, elle converge vers cette valeur d'adhérence. D'où la convergence simple de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers g sur K .

7. (a) Soit $a \in K$, montrons que g est continue en a . Pour $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\|g(x) - g(a)\| \leq \|g(x) - g_n(x)\| + \|g_n(x) - g_n(a)\| + \|g_n(a) - g(a)\|$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme A est équicontinue en a , il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in B(a, r)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|g_n(x) - g_n(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ (puisque $g_n \in A$). D'autre part, la convergence simple de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers g sur K donne l'existence, pour tout $x \in K$, d'un rang $N_x \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\|g(x) - g_n(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Ainsi, pour tout $x \in K$ vérifiant $|x - a| < r$, en notant $\tilde{N}_x := \max(N_x, N_a)$,

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(a)\| &\leq \|g(x) - g_{\tilde{N}_x}(x)\| + \|g_{\tilde{N}_x}(x) - g_{\tilde{N}_x}(a)\| + \|g_{\tilde{N}_x}(a) - g(a)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui montre la continuité de g en a , ceci pour tout $a \in K$. g est alors continue sur K .

- (b) Supposons par l'absurde que la convergence de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas uniforme. Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ et } x \in K / \|g_n(x) - g(x)\| > \varepsilon_0$$

Cela permet de construire une suite d'indices $(n_N)_{N \in \mathbb{N}}$ que l'on peut prendre strictement croissante (quitte à considérer, $(n_N)_{0 \leq N \leq N_0}$ étant construite, $n_{N_0+1} \geq \tilde{N} := \max(N_0 + 1, n_{N_0} + 1)$ dans la proposition ci-dessus), ainsi qu'une suite $(x_N)_{N \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \|g_{n_N}(x_N) - g(x_N)\| > \varepsilon_0 \quad (\text{i})$$

Comme $(x_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'un compact, elle admet une suite extraite $(x_{\theta(N)})_{N \in \mathbb{N}}$ convergente dans K , dont on note $\ell \in K$ la limite. On a alors :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \|g_{n_{\theta(N)}}(x_{\theta(N)}) - g(x_{\theta(N)})\| \leq \|g_{n_{\theta(N)}}(x_{\theta(N)}) - g_{n_{\theta(N)}}(\ell)\| + \|g_{n_{\theta(N)}}(\ell) - g(\ell)\| + \|g(\ell) - g(x_{\theta(N)})\|$$

Puisque A est équicontinue en ℓ , il existe $r > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in B(\ell, r) \cap K$, $\|g_{n_{\theta(N)}}(y) - g_{n_{\theta(N)}}(\ell)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$ et puisque $x_{\theta(N)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall N \geq N_1$, $|x_{\theta(N)} - \ell| < r$.

Ensuite, puisque $(g_{n_{\theta(N)}})_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers g sur K (car pour tout $x \in K$, $(g_{n_{\theta(N)}}(x))_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ et que celle-ci tend vers $g(x)$), il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall N \geq N_2$, $\|g_{n_{\theta(N)}}(\ell) - g(\ell)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$.

Enfin, par continuité de g , $\lim_{N \rightarrow +\infty} g(x_{\theta(N)}) = g(\ell)$ donc on peut trouver $N_3 \in \mathbb{N}$ à partir duquel l'on a $\|g(x_{\theta(N)}) - g(\ell)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$.

D'où :

$$\forall N \geq \max(N_1, N_2, N_3), \|g_{n_{\theta(N)}}(x_{\theta(N)}) - g(x_{\theta(N)})\| \leq \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} = \varepsilon_0$$

ce qui contredit (i).

On en déduit que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur K .

- (c) Les questions précédentes montrent ainsi que si $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ vérifie (P2), c'est-à-dire est équicontinue et telle que $A(x)$ est bornée pour tout $x \in K$, alors de toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, on peut exhiber une sous-suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme au-dessus qui converge uniformément (7.(b)) vers une fonction g qui est continue sur K (7.(a)). D'après la question 2., cela équivaut exactement à dire que A est relativement compacte, ce qui achève de montrer l'implication (P2) $\Rightarrow$ (P1).

Partie III - Existence de solutions

1. Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant y_{init} , il existe $r > 0$ tel que $B_r = \overline{B(y_{\text{init}}, r)} \subset \Omega$.

D'autre part, F est continue sur Ω par hypothèse, donc sur B_r , et comme celui-ci est un compact en tant que fermé borné en dimension finie, $F(B_r)$ est aussi compact dans $\mathbb{R}^d$. En particulier, cet ensemble est borné, ce qui assure l'existence d'un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall y \in B_r, \quad \|F(y)\| \leq M$$

Prenons alors $T > 0$ de sorte que $T \leq \frac{r}{M}$, (ce qui est possible car $r, M > 0$ donc $\frac{r}{M}$ aussi). Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence finie sur $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \text{ "on peut définir } (y_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in B_{nr/N}^{n+1} \text{ vérifiant : } \begin{cases} y_0 = y_{\text{init}} \\ \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, y_{k+1} = y_k + \Delta t F(y_k) \end{cases} \text{ "}$$

- Pour avoir $\mathcal{P}(0)$, il suffit de poser $y_0 = y_{\text{init}} \in B_0 = B_{0 \cdot r/N}$, la seconde propriété étant alors triviale.
- Soit $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$; on suppose $\mathcal{P}(n)$. Alors, en notant $(y_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in B_{nr/N}^{n+1}$ la suite considérée, on peut poser, puisque $y_n \in B_{nr/N} \subset B_r \subset \Omega$, $y_{n+1} := y_n + \Delta t F(y_n)$. Alors :

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_{\text{init}}\| &\leq \|y_{n+1} - y_n\| + \|y_n - y_{\text{init}}\| \\ &\leq \Delta t \|F(y_n)\| + \frac{nr}{N} \\ &\leq \frac{T}{N} M + \frac{nr}{N} \quad \text{car } y_n \in B_r \\ &\leq \frac{r}{N} + \frac{nr}{N} \quad \text{par choix de } T \\ &\leq \frac{(n+1)r}{N} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $y_{n+1} \in B_{(n+1)r/N}$, et on a toujours $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $y_k \in B_{nr/N} \subset B_{(n+1)r/N}$ et $y_{k+1} = y_k + \Delta t F(y_k)$, ainsi que $y_0 = y_{\text{init}}$. On obtient donc $\mathcal{P}(n+1)$.

En particulier, d'après $\mathcal{P}(N)$,

$$\exists (y_n)_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} \in B_r^{N+1} / \begin{cases} y_0 = y_{\text{init}} \\ \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, y_{n+1} = y_n + \Delta t F(y_n) \end{cases} \quad \text{ceci pour tout } N \in \mathbb{N}^*$$

On a donc bien pu choisir $r > 0$ et $T > 0$ convenables.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction $\phi_N : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \forall t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t], & \phi_N(t) = (t - n\Delta t) \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} + y_n \\ \phi_N(N\Delta t) = \phi_N(T) = y_N \end{cases}$$

Vérifions que cette fonction répond au problème :

– Elle est bien affine sur chaque $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$: en effet, pour $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, elle l'est sur $[n\Delta t, (n+1)\Delta t[$ et son expression sur cet intervalle est prolongée prolongée par $\phi_N((n+1)\Delta t) = y_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} ((n+1)\Delta t - n\Delta t) + y_n$ (i).

– Elle est ainsi continue sur chaque $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ (car affine), donc sur $\bigcup_{n=0}^{N-1} [n\Delta t, (n+1)\Delta t] = [0, T]$.

– Il est clair d'après l'expression de ϕ_N que pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $\phi_N(n\Delta t) = y_n$.

Vérifions ensuite qu'elle est unique. Si ψ_N est une autre telle fonction, alors pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^d$ tels que :

$$\forall t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t], \quad \psi_N(t) = t\alpha + \beta$$

avec :

$$\begin{cases} \psi_N(n\Delta t) = n\Delta t\alpha + \beta = y_n & \text{(ii)} \\ \psi_N((n+1)\Delta t) = (n+1)\Delta t\alpha + \beta = y_{n+1} & \text{(iii)} \end{cases}$$

donc puisque le déterminant de ce système est $\begin{vmatrix} n\Delta t & 1 \\ (n+1)\Delta t & 1 \end{vmatrix} = -\Delta t \neq 0$ et que les coefficients pour ϕ_N conviennent (d'après son expression pour (ii), et d'après (i) pour (iii)), on en déduit que ϕ_N et ψ_N coïncident sur $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ (on peut, pour s'en convaincre, se ramener au cas connu de plusieurs systèmes linéaires à inconnues réelles en décomposant α et β dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$).

Donc, $\psi_N = \phi_N$ sur $[0, T]$, d'où l'unicité.

3. Montrons que $A := \{\phi_N \mid N \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d)$ vérifie la propriété (P1), ce qui nous permettra d'utiliser le théorème 1 puisque $[0, T]$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in [0, T]$: il existe $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ tel que $x \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$. Considérons $y \in [0, T]$ et notons m un entier de $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$ tel que $y \in [m\Delta t, (m+1)\Delta t]$. Alors, en notant $\mu := \max_{i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket} \|y_{i+1} - y_i\|$, on distingue plusieurs cas :

– si $m > n$ (en particulier, $y \geq x$),

$$\begin{aligned} \|\phi_N(x) - \phi_N(y)\| &\leq \|\phi_N(y) - \phi_N(m\Delta t)\| + \sum_{k=n+1}^{m-1} \|\phi_N((k+1)\Delta t) - \phi_N(k\Delta t)\| + \|\phi_N((n+1)\Delta t) - \phi_N(x)\| \\ &\leq \left\| (y - m\Delta t) \frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta t} \right\| + \sum_{k=n+1}^{m-1} \|y_{k+1} - y_k\| + \left\| y_{n+1} - y_n - (x - n\Delta t) \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} \right\| \\ &\leq (y - m\Delta t) \frac{\|y_{m+1} - y_m\|}{\Delta t} + \sum_{k=n+1}^{m-1} ((k+1)\Delta t - k\Delta t) \frac{\|y_{k+1} - y_k\|}{\Delta t} + ((n+1)\Delta t - x) \frac{\|y_{n+1} - y_n\|}{\Delta t} \\ &\leq \frac{\mu}{\Delta t} \left(y - m\Delta t + \sum_{k=n+1}^{m-1} ((k+1)\Delta t - k\Delta t) + (n+1)\Delta t - x \right) \\ &\leq \frac{\mu}{\Delta t} (y - x) \quad \text{par télescopage (encore valable lorsque la somme est vide, i.e. pour } m = n+1) \end{aligned}$$

– si $m < n$ (auquel cas $y \leq x$), échanger les rôles de x et y dans les calculs précédents donne :

$$\|\phi_N(x) - \phi_N(y)\| \leq \frac{\mu}{\Delta t} (x - y)$$

– si $m = n$, on a :

$$\|\phi_N(x) - \phi_N(y)\| = \left\| \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} \right\| |x - y| \leq \frac{\mu}{\Delta t} |y - x|$$

Or, $\forall i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $\|y_{i+1} - y_i\| = \Delta t \|F(y_i)\| \leq \Delta t M$ donc $\frac{\mu}{\Delta t} \leq M$.

On a donc montré que toutes les fonctions ϕ_N , pour $N \in \mathbb{N}^*$, sont M -lipschitziennes. La question 1 permet alors d'en déduire que $\{\phi_N \mid N \in \mathbb{N}^*\}$ est équicontinue sur $[0, T]$.

De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et tout $t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$,

$$\phi_N(t) = (t - n\Delta t) \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} + y_n = \left(\frac{t - n\Delta t}{\Delta t} \right) y_{n+1} + \left(1 - \frac{t - n\Delta t}{\Delta t} \right) y_n \in B_r$$

car il s'agit d'une combinaison linéaire convexe de $y_n, y_{n+1} \in B_r$ et que les boules sont convexes.

On a donc, pour tout $x \in [0, T]$, $\{\phi_N(x) \mid N \in \mathbb{N}^*\} \subset B_r$, i.e. $A(x)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^d$.

A vérifie donc (P1), c'est-à-dire (P2) d'après le théorème 1 : on en déduit que $\{\phi_N \mid N \in \mathbb{N}\}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d)$, et donc que $(\phi_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$, qui en est une suite, admet une sous-suite $(\phi_{\sigma(N)})_{N \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur $[0, T]$ vers une fonction $\phi \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d)$.

4. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$\psi_N : \begin{cases} [0, T] & \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ t & \longmapsto \begin{cases} y_n & \text{si } t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t[\\ y_N & \text{si } t = T = N\Delta t \end{cases} \end{cases}$$

On a bien $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\psi_N \in \text{Esc}([0, T], \mathbb{R}^d)$ et elles sont à valeurs dans $B_r \subset \Omega$, ce qui permet de considérer les fonctions $F \circ \psi_N$. De plus, $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $\psi_N(n\Delta t) = y_n = \phi_N(n\Delta t)$.

Il reste à vérifier la dernière propriété ; soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, T]$. Il existe $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ tel que $t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$. Alors,

$$\begin{aligned} y_{\text{init}} + \int_0^t F(\psi_N(s)) \, ds &= y_{\text{init}} + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} F(\psi_N(s)) \, ds + \int_{n\Delta t}^t F(\psi_N(s)) \, ds \\ &= y_{\text{init}} + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t F(y_k) + (t - n\Delta t) F(y_n) \\ &= (y_0 + \Delta t F(y_0)) + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t F(y_k) + (t - n\Delta t) F(y_n) \\ &= (y_1 + \Delta t F(y_1)) + \sum_{k=2}^{n-1} \Delta t F(y_k) + (t - n\Delta t) F(y_n) \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}
 y_{\text{init}} + \int_0^t F(\psi_N(s)) \, ds &= \dots = (y_{n-1} + F(y_{n-1})) + (t - n\Delta t)F(y_n) \\
 &= y_n + (t - n\Delta t)F(y_n) \\
 &= (t - n\Delta t) \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} + y_n \\
 &= \phi_N(t)
 \end{aligned}$$

D'où l'existence (ainsi que l'expression explicite) d'une suite de fonctions $(\psi_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ telle que recherchée.

5. Notons toujours $\sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*)$ une extractrice telle que $(\phi_{\sigma(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ϕ sur $[0, T]$, ainsi que $M > 0$ un majorant de $\|F\|$ sur B_r . Montrons que $(\psi_{\sigma(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge également uniformément vers ϕ sur $[0, T]$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, T[$, en notant $n_t \in \llbracket 0, \sigma(N) - 1 \rrbracket$ l'unique entier tel que $t \in [n_t \Delta t, (n_t + 1) \Delta t[$,

$$\begin{aligned}
 \|\phi(t) - \psi_{\sigma(N)}(t)\| &\leq \|\phi(t) - \phi_{\sigma(N)}(t)\| + \|\phi_{\sigma(N)}(t) - \psi_{\sigma(N)}(t)\| \\
 &\leq \|\phi(t) - \phi_{\sigma(N)}(t)\| + \left\| (t - n_t \Delta t) \frac{y_{n_t+1} - y_{n_t}}{\Delta t} \right\| \\
 &\leq \|\phi(t) - \phi_{\sigma(N)}(t)\| + \|y_{n_t+1} - y_{n_t}\| \quad \text{car } |t - n_t \Delta t| \leq 1 \\
 &\leq \|\phi - \phi_{\sigma(N)}\|_{\infty} + \Delta t M \\
 &\leq \|\phi - \phi_{\sigma(N)}\|_{\infty} + \frac{TM}{\sigma(N)}
 \end{aligned}$$

et cela reste vrai pour $t = T$ puisque, comme $\psi_{\sigma(N)}(\sigma(N)\Delta t) = \phi_{\sigma(N)}(\sigma(N)\Delta t)$, on a :

$$\|\phi(T) - \psi_{\sigma(N)}(T)\| \leq \|\phi(T) - \phi_{\sigma(N)}(T)\| + \|\phi_{\sigma(N)}(T) - \psi_{\sigma(N)}(T)\| \leq \|\phi - \phi_{\sigma(N)}\|_{\infty}$$

Donc, $\|\phi - \psi_{\sigma(N)}\| \leq \|\phi - \phi_{\sigma(N)}\|_{\infty} + \frac{TM}{\sigma(N)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui démontre le résultat annoncé.

6. Montrons que (ϕ, T) est solution du problème de Cauchy (1).

Comme $(\psi_{\sigma(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge en particulier simplement vers ϕ sur $[0, T]$ d'après la question précédente, la suite de fonctions $(F \circ \psi_{\sigma(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $F \circ \phi$ sur $[0, T]$ (par composition de limites pour chaque $t \in [0, T]$, cette dernière fonction étant bien définie puisque B_r est fermée, ce qui entraîne que ϕ est à valeurs dans B_r en tant que limite simple de $(\psi_{\sigma(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$ et de $(\phi_{\sigma(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$).

Soit $t \in [0, T]$. Pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on note $(F \circ \psi_{\sigma(N)})_i$ la i -ième application coordonnée de $F \circ \psi_{\sigma(N)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$:

- F étant continue sur $\text{Im}(\psi_{\sigma(N)}) \subset B_r \subset \Omega$, $F \circ \psi_{\sigma(N)}$ est continue par morceaux sur $[0, T]$, donc $(F \circ \psi_{\sigma(N)})_i$ aussi.
- $((F \circ \psi_{\sigma(N)})_i)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, T]$ vers $(F \circ \phi)_i$ (d'après l'équivalence entre la convergence d'une suite d'éléments et celle des suites de coordonnées dans une base, dans un e.v.n de dimension finie).
- On a, en notant $\|\cdot\|_{\infty, \text{bc}}$ la norme infinie dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$ ainsi que $C > 0$ une constante telle que $\|\cdot\|_{\infty, \text{bc}} \leq C\|\cdot\|$ (qui existe par équivalence des normes en dimension finie) :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall u \in [0, t], \quad |(F \circ \psi_{\sigma(N)})_i(u)| \leq \|F \circ \psi_{\sigma(N)}(u)\|_{\infty, \text{bc}} \leq C\|F \circ \psi_{\sigma(N)}(u)\| \leq CM$$

avec $u \mapsto CM$ qui est intégrable sur le segment $[0, t]$.

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^t (F \circ \psi_{\sigma(N)})_i(s) \, ds = \int_0^t (F \circ \phi)_i(s) \, ds$$

puis, en notant $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^t F(\psi_{\sigma(N)})(s) \, ds = \sum_{i=1}^d \left(\int_0^t (F \circ \psi_{\sigma(N)})_i(s) \, ds \right) e_i$$

donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^t F(\psi_{\sigma(N)}(s)) \, ds = \sum_{i=1}^d \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^t (F \circ \psi_{\sigma(N)})_i(s) \, ds \right) e_i = \sum_{i=1}^d \left(\int_0^t (F \circ \phi)_i(s) \, ds \right) e_i = \int_0^t F(\phi(s)) \, ds$$

D'autre part, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \phi_{\sigma(N)}(t) = \phi(t)$ d'après la question 3, donc en passant à la limite dans l'égalité de la question 5 lorsque $N \rightarrow +\infty$,

$$\phi(t) = y_{\text{init}} + \int_0^t F(\phi(s)) \, ds$$

et ce, pour tout $t \in [0, T]$.

$F \circ \phi$ étant continue sur $[0, T]$ par composition, cela montre que $\phi \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^d)$ avec $\phi([0, T]) \subset B_r \subset \Omega$ et :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], & \phi'(t) = F(\phi(t)) \\ \phi(0) = y_{\text{init}} \end{cases}$$

(ϕ, T) est donc effectivement solution de (1), ce qui démontre le théorème 2 puisque F a été supposée continue (et quelconque) en début de partie.

7. Pour $\alpha \geq 0$, on définit la fonction :

$$\phi_\alpha : \begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \alpha] \\ (t - \alpha)^3 & \text{si } t > \alpha \end{cases} \end{cases}$$

Vérifions que pour tout $\alpha \geq 0$, cette fonction est solution de (1) pour $F : y \mapsto 3|y|^{2/3}$. On vérifie que ϕ_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, avec :

$$\forall t \geq 0, \quad \phi'_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \alpha \\ 3(t - \alpha)^2 & \text{si } t > \alpha \end{cases}$$

D'autre part, pour tout $t \in [0, \alpha]$, $F(\phi_\alpha(t)) = 0$ et pour $t \in [\alpha, +\infty[$, $F(\phi_\alpha(t)) = 3|(t - \alpha)^3|^{2/3} = 3(t - \alpha)^2$, donc on a bien $\phi'_\alpha = F \circ \phi_\alpha$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi, chaque ϕ_α est solution globale, ce qui montre que le problème de Cauchy associé à F admet bien une infinité de solutions.

Partie IV - Inclusions différentielles

- Supposons que pour toute partie compacte $K \subset \mathbb{R}^d$, il existe $C_K > 0$ telle que $\mathcal{F}$ vérifie (3). Soient (ϕ, T) et (ψ, T') deux solutions maximales dont on suppose, sans perte de généralité, qu'elles vérifient $T \leq T'$. Soit $\alpha \in]0, T[$; montrons que ϕ et ψ sont égales sur $[0, T - \alpha]$. Elles sont continues sur ce compact de $\mathbb{R}$, donc l'envoient sur un compact, de sorte que $K_\alpha := \phi([0, T - \alpha]) \cup \psi([0, T - \alpha])$ est compacte. Ainsi, il existe d'après l'hypothèse (3) $C_\alpha > 0$ telle que :

$$\forall (x, y) \in K_\alpha^2, \quad \forall (v_x, v_y) \in \mathcal{F}(x) \times \mathcal{F}(y), \quad \langle v_x - v_y, x - y \rangle \leq \|x - y\|^2$$

Soit $(t_0, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T - \alpha$ une subdivision de $[0, T - \alpha]$ ϕ' et ψ' -admissible. On définit la fonction z , continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, T - \alpha]$, et telle que $(t_0, \dots, t_N)$ soit z' -admissible (par opérations usuelles et par bilinéarité du produit scalaire), par :

$$\forall t \in [0, T - \alpha], \quad z(t) = \|\phi(t) - \psi(t)\|^2 = \langle (\phi - \psi)(t), (\phi - \psi)(t) \rangle \geq 0$$

ce qui donne :

$$\forall t \in [0, T - \alpha] \setminus \{t_i, i \in \llbracket 0, N \rrbracket\}, \quad z'(t) = 2 \langle (\phi - \psi)(t), (\phi - \psi)'(t) \rangle$$

Puisque ϕ et ψ sont solutions de (2) sur $[0, T - \alpha]$ et à valeurs dans K_α , on a pour tout $i \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ et tout $t \in]t_i, t_{i+1}[$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \phi'(t) \in \mathcal{F}(\phi(t)) \\ \psi'(t) \in \mathcal{F}(\psi(t)) \end{cases} & \text{donc} \quad \langle \phi'(t) - \psi'(t), \phi(t) - \psi(t) \rangle \leq C_\alpha \|\phi(t) - \psi(t)\|^2 \\ & \text{soit} \quad \frac{1}{2} z'(t) \leq C_\alpha z(t) \\ & \text{i.e.} \quad e^{-2C_\alpha t} (z'(t) - 2C_\alpha z(t)) \leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$, l'intégrale ci-dessous étant définie et faussement impropre car ϕ' et ψ' , donc z' , admettent des limites finies à droite de t_i et à gauche de t_{i+1} (et sont continues sur $]t_i, t_{i+1}[$) :

$$\begin{aligned} e^{-2C_\alpha t} z(t) - e^{-2C_\alpha t_i} z(t_i) &= \int_{t_i}^t e^{-2C_\alpha u} (z'(u) - 2C_\alpha z(u)) \, du \leq \int_{t_i}^t 0 \, du = 0 \\ \text{soit} \quad e^{-2C_\alpha t} z(t) &\leq e^{-2C_\alpha t_i} z(t_i) \quad (\text{i}) \end{aligned}$$

En particulier, en l'appliquant aux $t = t_{i+1}$, on a :

$$0 \leq e^{-2C_\alpha t_N} z(t_N) \leq \dots \leq e^{-2C_\alpha t_1} z(t_1) \leq e^{-2C_\alpha t_0} z(t_0) = z(0) = \|\phi(0) - \psi(0)\|^2 = \|y_{\text{init}} - y_{\text{init}}\|^2 = 0$$

donc chaque $z(t_i)$ est nul, puis en reportant dans (i), on en déduit finalement que z est nulle, c'est-à-dire $\phi = \psi$, sur $[0, T - \alpha]$.

Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, on en déduit que $\phi = \psi$ sur $[0, T[$. Ensuite, de cette égalité on obtient $T' = T$: en effet, si ce n'était pas le cas, i.e. si on avait $T < T'$, alors (ϕ, T) ne serait pas maximale puisqu'on pourrait la prolonger en (ψ, T') .

Conclusion : $(\phi, T) = (\psi, T')$ et (2) admet bien au plus une solution maximale.

2. (a) Soient $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ainsi que :

$$\begin{cases} v_x = (a, b) \in \mathcal{F}(x) \\ v_y = (c, d) \in \mathcal{F}(y) \end{cases}$$

Quitte à échanger x et y , on peut supposer $x_1 \geq y_1$. Puisque $\text{Im } \mathcal{F} \subset [v_1^+, v_1^-] \times [v_2^+, v_2^-] = [-1, 1] \times \{2\}$, on a $b = d = 2$ et $a, c \in [-1, 1]$. Alors,

$$\begin{aligned} \langle v_x - v_y, x - y \rangle &= \langle (a - c, b - d), (x_1 - y_1, x_2 - y_2) \rangle \\ &= (x_1 - y_1)(a - c) + (x_2 - y_2)(b - d) \\ &= (x_1 - y_1)(a - c) \end{aligned}$$

On distingue plusieurs cas :

- Si $x_1 < 0$, alors $y_1 < 0$ aussi et $v_x = v_y = v^-$, donc $\langle v_x - v_y, x - y \rangle = 0$.
- Si $x_1 > 0$, alors $v_x = v^+ = (-1, 2)$ et $\langle v_x - v_y, x - y \rangle = (x_1 - y_1)(-1 - c) \leq 0$ car $c \geq -1$.
- Si $x_1 = 0$ et $y_1 = 0$, alors $\langle v_x - v_y, x - y \rangle = 0$ car $x_1 = y_1$.
- Si $x_1 = 0$ et $y_1 < 0$, alors $v_y = v^- = (1, 2)$ et $\langle v_x - v_y, x - y \rangle = (x_1 - y_1)(a - 1) \leq 0$ car $a \leq 1$.

On a donc dans tous les cas $\langle v_x - v_y, x - y \rangle \leq 0 \leq \|x - y\|^2$, donc la constante $C = 1$ convient indépendamment du compact de $\mathbb{R}^2$ considéré. $\mathcal{F}$ vérifie donc (3).

La question 1 assure alors l'unicité de la solution au problème d'inclusion différentielle (2) pour tout $y_{\text{init}} \in \mathbb{R}^2$.

- (b) Posons :

$$\phi_1 : \begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto t(0, 2) \end{cases}$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \phi_1(0) = (0, 0) = y_{\text{init}} \\ \forall t \geq 0, \quad \phi_1'(t) = (0, 2) \in [-1, 1] \times \{2\} = \mathcal{F}(t(0, 2)) = \mathcal{F}(\phi_1(t)) \end{cases}$$

donc elle est solution globale, a fortiori maximale. Puisque toute solution maximale éventuelle est unique, ϕ_1 est l'unique solution maximale du problème (2) pour $y_{\text{init}} = (0, 0)$.

- (c) Posons ensuite :

$$\phi_2 : \begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{cases} t(-1, 2) + (1, 0) & \text{si } t \leq 1 \\ t(0, 2) & \text{si } t > 1 \end{cases} \end{cases}$$

ϕ_2 est continue sur $[0, +\infty[$ (en particulier, en 1 car $(-1, 2) + (1, 0) = (0, 2) = \phi_2(1)$), et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$ avec :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, 1[, \quad \phi_2'(t) = (-1, 2) \in \{v^+\} = \mathcal{F}(\phi_2(t)) \\ \forall t > 1, \quad \phi_2'(t) = (0, 2) \in [-1, 1] \times \{2\} = \mathcal{F}(\phi_2(t)) \\ \phi_2'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1, t < 1} (-1, 2) \in [-1, 1] \times \{2\} = \mathcal{F}(\phi_2(1)) \\ \phi_2'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1, t > 1} (0, 2) \in [-1, 1] \times \{2\} = \mathcal{F}(\phi_2(1)) \end{cases}$$

Enfin, $\phi_2(0) = (1, 0) = y_{\text{init}}$, ce qui montre que ϕ_2 est solution globale du problème (2) pour $y_{\text{init}} = (1, 0)$: c'en est donc l'unique solution maximale.

3. Remarque : on a $v_1^- = 0 < 1 = v_1^+$, ce que l'énoncé a a priori exclu dans les hypothèses sur les valeurs prises par la fonction $\mathcal{F}$. Il est donc possible qu'il y ait là une erreur d'énoncé ; je poursuis néanmoins la résolution de cette question avec les vecteurs $v^- = (0, 1)$ et $v^+ = (1, 1)$.

(a) Soit le compact $K = [-1, 1] \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\varepsilon \in]0, 1]$. On pose :

$$\begin{cases} x_\varepsilon = (\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in K \\ y_\varepsilon = (-\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in K \end{cases} \quad \text{de sorte que} \quad \begin{cases} \mathcal{F}(x_\varepsilon) = \{v^+\} = \{(1, 1)\} \\ \mathcal{F}(y_\varepsilon) = \{v^-\} = \{(0, 1)\} \end{cases}$$

On a, pour tout $(v_{x_\varepsilon}, v_{y_\varepsilon}) \in \mathcal{F}(x_\varepsilon) \times \mathcal{F}(y_\varepsilon)$,

$$\langle v_{x_\varepsilon} - v_{y_\varepsilon}, x_\varepsilon - y_\varepsilon \rangle = \left\langle (1, 1) - (0, 1), \left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) - \left(-\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) \right\rangle = \langle (1, 0), (\varepsilon, 0) \rangle = \varepsilon$$

donc :

$$\frac{\langle v_{x_\varepsilon} - v_{y_\varepsilon}, x_\varepsilon - y_\varepsilon \rangle}{\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\|^2} = \frac{\varepsilon}{\|(\varepsilon, 0)\|^2} = \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} +\infty$$

ce qui montre qu'aucune constante $C > 0$ ne permet de majorer $\langle v_x - v_y, x - y \rangle$ par $C\|x - y\|^2$ indépendamment de $(x, y) \in K^2$, et donc que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (3).

(b) Soit (ψ, T) une solution maximale du problème (2) pour $y_{\text{init}} = (1, 0)$ et $(t_0, \dots, t_N)$ une subdivision de $[0, T]$ adaptée pour ψ' . On note ψ_1 et ψ_2 les applications coordonnées de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, qui possèdent donc les mêmes propriétés de continuité, de dérivabilité et de finitude de limites que ψ sur chaque $]t_i, t_{i+1}[$.

Puisque $\psi(0) = y_{\text{init}} = (1, 0)$ avec ψ continue sur $[0, T[$, il existe $\varepsilon \in]0, T]$ que l'on prend maximal, tel que $\psi_1 > 0$ sur $[0, \varepsilon[$. Plus précisément, $\varepsilon = \min(\{t \in [0, T[\mid \psi_1(t) = 0\} \cup \{T\})$, qui existe bien car $\psi_1^{-1}(\{0\})$ est minoré par 0 et fermé par continuité de ψ_1 , donc admet une borne inférieure qui est également son minimum. On a dans ce cas, en notant $i_0 := \max\{i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \mid t_i \leq \varepsilon\}$:

$$\begin{cases} \forall t \in [0, \varepsilon] \setminus \{t_0, \dots, t_{i_0}\}, & \psi'(t) \in \mathcal{F}(\psi(t)) = \{v^+\} \\ \forall i \in \llbracket 0, i_0 - 1 \rrbracket, & \lim_{t \rightarrow t_i, t > t_i} \psi'(t) \in \mathcal{F}(\psi(t_i)) = \{v^+\} \\ \forall i \in \llbracket 1, i_0 \rrbracket, & \lim_{t \rightarrow t_i, t < t_i} \psi'(t) \in \{v^+\} \end{cases}$$

(la troisième proposition étant vraie même lorsque $t_{i_0} = \varepsilon$ et que l'on n'a pas donc pas $\psi(t_{i_0}) > 0$, en passant à la limite quand $t \rightarrow t_{i_0}^-$ dans la première proposition).

ψ est donc en fait $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \varepsilon[$ et ψ' y est constante égale à $v^+ = (1, 1)$. De ceci et de la condition initiale, on déduit :

$$\forall t \in [0, \varepsilon[, \quad \psi(t) = t(1, 1) + (1, 0) = (1 + t, t) \quad (i)$$

Supposons par l'absurde que $\varepsilon < T$. Alors, $\psi_1(\varepsilon) \leq 0$ (ii) car sinon ψ serait strictement positive sur un voisinage de $]\varepsilon - \eta, \varepsilon + \eta[$ de ε contenu dans $[0, T[$ et ε ne serait par conséquent pas maximal puisque l'on pourrait prendre $\varepsilon + \eta > \varepsilon$ à la place. Or, d'après (i), $\forall t \in [0, \varepsilon[, \psi_1(t) \geq 1$ donc en passant à la limite lorsque $t \rightarrow \varepsilon$ et par continuité, on devrait avoir $\psi_1(\varepsilon) \geq 1$ ce qui contredit (ii).

L'expression (i) est donc valable sur $[0, T[$, et puisque l'on vérifie qu'elle fournit une solution globale au problème (2), on en déduit par maximalité de (ψ, T) que $T = +\infty$.

(2) admet donc une unique solution maximale, qui est :

$$\psi : \begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (1 + t, t) \end{cases}$$

(c) Notons que le fait d'avoir $v_1^+ > v_1^-$ entraîne que $[v_1^+, v_1^-] \times [v_2^+, v_2^-] = \emptyset$.

Ainsi, si (2) admettait une solution maximale (ψ, T) pour $y_{\text{init}} = (0, 0)$, alors $\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \psi'(t)$ existerait et appartiendrait à $\mathcal{F}(\psi(0)) = \mathcal{F}((0, 0)) = \emptyset$, ce qui est impossible.

Donc, (2) n'admet cette fois-ci aucune solution maximale (et même, aucune solution tout court...).