My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مموني مولاي اسماعيل

Devoir Maison (EVN)

Mines 2022

Autour des exponentielles de matrices

Dans tout le sujet, le corps $\mathbf{K}$ sera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, vérifiant les propriétés

$$\|I_n\| = 1 \; . \qquad (N_1)$$

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})\right)^2 \qquad \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \; . \qquad (N_2)$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice, notée e^A, ou bien $\exp(A)$, définie par

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \; .$$

On rappelle que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'application

$$f_A : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \; , \quad t \mapsto f_A(t) = e^{tA}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f'_A(t) = A \, e^{tA} = e^{tA} \, A \; .$$

On admettra que, si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, plus précisément si on a $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors

$$e^B = P^{-1} \, e^A \, P.$$

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on définit leur **crochet de Lie** par

$$[A,B] = AB - BA \; .$$

La partie 4 du problème est indépendante des parties 2 et 3.

1 Questions préliminaires

On se donne deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose dans les questions 1) et 2) que A et B commutent.

1 ▷ Montrer que les matrices A et e^B commutent.

On définit une application

$$\begin{aligned} g\ :\ \mathbf{R} &\to \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ t &\longmapsto g(t) = e^{t(A+B)}\, e^{-tB}. \end{aligned}$$

2 ▷ Montrer que l'application g, et l'application f_A définie en préambule, sont solutions d'un même problème de Cauchy. En déduire une démonstration de la relation

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}\ . \tag{1}$$

3 ▷ Réciproquement, on suppose la relation (1) satisfaite. En dérivant deux fois cette relation par rapport à la variable réelle t, montrer que les matrices A et B commutent.

4 ▷ Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, prouver la relation $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

5 ▷ Montrer que $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

2 Formule de Trotter-Kato

Dans cette partie, on note A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. L'objectif est de prouver la relation

$$\lim_{k\to+\infty} \left(e^{\frac{A}{k}}\, e^{\frac{B}{k}}\right)^k = e^{A+B} \text{ ou } \lim_{k\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{k}\right)\exp\left(\frac{B}{k}\right)\right)^k = \exp(A+B)\ . \tag{2}$$

Pour tout k entier naturel non nul, on pose

$$X_k = \exp\left(\frac{A}{k}\right)\ \exp\left(\frac{B}{k}\right) \text{ et } Y_k = \exp\left(\frac{A+B}{k}\right).$$

6 ▷ Prouver les majorations

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \qquad \|X_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right) \text{ et } \|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)\ .$$

On introduit la fonction

$$\begin{aligned} h\ :\ \mathbf{R} &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ t &\longmapsto h(t) = e^{tA}e^{tB} - e^{t(A+B)} \end{aligned}$$

7 ▷ Montrer que

$$X_k - Y_k = O\Big(\frac{1}{k^2}\Big) \text{ lorsque } k \to +\infty \ .$$

8 ▷ Vérifier la relation

$$X_k^k - Y_k^k = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1}.$$

En déduire la relation (2).

3 Vers les algèbres de Lie

Dans cette partie, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Pour tout n entier naturel, $n \geq 2$, on introduit l'ensemble, dit **groupe spécial linéaire** :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det(M) = 1\big\} \ .$$

Si G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, on introduit son **algèbre de Lie** :

$$\mathcal{A}_G = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R} \quad e^{tM} \in G\big\} \ .$$

L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, ainsi que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, sont bien des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On ne demande pas de le démontrer.

9 ▷ Déterminer $\mathcal{A}_G$ lorsque $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

10 ▷ Si $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, montrer que $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, ensemble des matrices antisymétriques.

Dans les questions 11) à 14), G est un sous-groupe fermé quelconque de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

11 ▷ En utilisant la partie 2, montrer que $\mathcal{A}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

12 ▷ Soient $A \in \mathcal{A}_G$ et $B \in \mathcal{A}_G$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} u : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t &\longmapsto u(t) = e^{tA} \cdot B \cdot e^{-tA} \end{aligned}$$

est à valeurs dans $\mathcal{A}_G$.

13 ▷ En déduire que $\mathcal{A}_G$ est stable par le crochet de Lie, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{A}_G,\ \forall B \in \mathcal{A}_G,\ [A, B] \in \mathcal{A}_G\ .$$

On rappelle que, si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on dit que M est **tangente** à G en I_n s'il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. L'ensemble des matrices tangentes à G en I_n est appelé **espace tangent** à G en I_n, et noté $\mathcal{T}_{I_n}(G)$.

On rappelle aussi que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est différentiable en tout point, par exemple parce qu'elle est polynomiale.

14 ▷ Prouver l'inclusion $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

15 ▷ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, que l'on pourra aussi considérer comme matrice complexe, soit l'application $\delta_M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \delta_M(t) = \det(I_n + tM)$. En utilisant un développement limité à l'ordre 1, montrer que δ_M est dérivable en 0 et calculer $\delta'_M(0)$.

16 ▷ Montrer que la différentielle au point I_n de l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est la forme linéaire "trace".

17 ▷ Montrer que, dans les cas particuliers $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, on a $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.

4 Comportement asymptotique

Étude d'un exemple

On considère deux nombres complexes distincts α et β. On suppose qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ admet α pour valeur propre simple, β pour valeur propre double.

18 ▷ Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où a est un certain nombre complexe. Calculer T^n pour n entier naturel, puis e^{tT} pour t réel. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que l'on ait $\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = 0_3$.

Cas général

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. On pose $E = \mathbf{C}^n$. L'espace vectoriel E, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, peut être muni d'une quelconque norme notée $\|\cdot\|_E$, on rappelle qu'elles sont toutes équivalentes. On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes, et on note u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à cette matrice. On s'intéresse au comportement asymptotique de la fonction f_A introduite dans le préambule, et à celui des fonctions vectorielles solutions du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$. Pour tout t réel et pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on notera $v_{i,j}(t)$ le coefficient d'indices (i,j) de la matrice e^{tA}. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f_A(t) = e^{tA} = \big(v_{i,j}(t)\big)_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ .$$

Pour toute valeur propre λ de la matrice A, on note m_λ sa multiplicité, et on introduit le sous-espace vectoriel

$$F_\lambda = \operatorname{Ker}\big((A - \lambda I_n)^{m_\lambda}\big) = \operatorname{Ker}\big((u - \lambda \operatorname{Id}_E)^{m_\lambda}\big) \ .$$

On posera aussi $\alpha = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \operatorname{Re}(\lambda)$.

19 ▷ Montrer que, si $\lim_{t \to +\infty} f_A(t) = 0_n$, alors $\alpha < 0$.

20 ▷ Montrer que $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} F_\lambda$.

21 ▷ En déduire l'existence de trois matrices P, D et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que :

$$\begin{aligned} P &\text{ est inversible,} \\ D &\text{ est diagonale,} \\ N &\text{ est nilpotente,} \\ ND &= DN, \\ A &= P(D+N)P^{-1}, \\ \chi_A &= \chi_D. \end{aligned}$$

22 ▷ En déduire qu'il existe un entier naturel p tel que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on ait

$$v_{i,j}(t) = O(t^p\, e^{\alpha t}) \text{ lorsque } t \to +\infty \ .$$

23 $\triangleright$ Étudier la réciproque de la question 19).

24 $\triangleright$ On suppose, *dans cette question seulement*, que les valeurs propres de la matrice A ont toutes des parties réelles positives ou nulles. Montrer que, si $X \in \mathbf{C}^n$, on a
$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0 \iff X = 0\ .$$

Dans les questions qui suivent, on introduit les polynômes suivants :
$$P_s(X) = \prod_{\substack{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\\ \mathrm{Re}(\lambda)<0}} (X-\lambda)^{m_\lambda},$$
$$P_i(X) = \prod_{\substack{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\\ \mathrm{Re}(\lambda)>0}} (X-\lambda)^{m_\lambda},$$
$$P_n(X) = \prod_{\substack{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\\ \mathrm{Re}(\lambda)=0}} (X-\lambda)^{m_\lambda},$$
et les sous-espaces $E_s = \mathrm{Ker}\,\big(P_s(A)\big)$, $E_i = \mathrm{Ker}\,\big(P_i(A)\big)$ et $E_n = \mathrm{Ker}\,\big(P_n(A)\big)$ de $E = \mathbf{C}^n$. *Les indices s, i, n signifient respectivement stable, instable et neutre.*

25 $\triangleright$ Après avoir justifié que $E = E_s \oplus E_i \oplus E_n$, montrer que
$$E_s = \big\{X \in E \mid \lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0\big\}\ .$$

On prouverait de même, mais ce n'est pas demandé, que
$$E_i = \big\{X \in E \mid \lim_{t\to-\infty} e^{tA}X = 0\big\}.$$

26 $\triangleright$ Montrer que
$$E_n = \big\{X \in E \mid \exists C \in \mathbf{R}_+^* \ \ \exists p \in \mathbf{N} \ \ \forall t \in \mathbf{R} \quad \|e^{tA}X\|_E \leq C\,\big(1+|t|\big)^p\big\}.$$

E_n est donc l'ensemble des vecteurs X de $\mathbf{C}^n$ tels que la fonction vectorielle $t \mapsto e^{tA}X$ ait un comportement polynomial en $-\infty$ et $+\infty$.

Fin du problème

UN CORRIGÉ du SUJET MINES-PONTS, MATH-2-MP, 2022

Partie A. Questions préliminaires.

1. Si $AB = BA$, alors par une récurrence immédiate, on a $AB^k = B^k A$ pour tout k entier naturel puis, par combinaisons linéaires, $A \cdot Q(B) = Q(B) \cdot A$ pour tout polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$. En particulier, pour tout k entier naturel,

$$A \cdot \Big(\sum_{j=0}^{k} \frac{B^j}{j!}\Big) = \Big(\sum_{j=0}^{k} \frac{B^j}{j!}\Big) \cdot A\ .$$

En faisant tendre k vers l'infini, par continuité du produit matriciel, il vient $A \cdot e^B = e^B \cdot A$.

2. Par dérivation d'un produit (justifié car le produit matriciel est bilinéaire), on obtient

$$g'(t) = (A+B) \cdot e^{t(A+B)} e^{-tB} - e^{t(A+B)} \cdot B \cdot e^{-tB}\ .$$

Mais, si A et B commutent, alors B et $t(A+B)$ commutent pour tout t, donc B et $e^{t(A+B)}$ commutent d'après **Q1.** Finalement,

$$g'(t) = (A+B) \cdot e^{t(A+B)} e^{-tB} - B \cdot e^{t(A+B)}\, e^{-tB} = A \cdot g(t)\ .$$

D'autre part, $f_A'(t) = A \cdot f_A(t)$. Comme $f_A(0) = g(0) = I_n$, les fonctions f_A et g sont solutions du même problème de Cauchy **(P):** $\begin{cases} M'(t) = A\, M(t) \\ M(0) = I_n \end{cases}$. *Notons que l'équation différentielle $M'(t) = A\, M(t)$, où la fonction inconnue est $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de classe $\mathcal{C}^1$, peut s'écrire sous la forme $M'(t) = \alpha\big(M(t)\big)$, où α est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\alpha(M) = AM$. Il s'agit donc bien d'un problème de Cauchy dans les termes du programme MP.* Par unicité de la solution d'un tel problème de Cauchy, on déduit que $g = f_A$. En particulier, dans le cas où $A = 0_n$, on obtient $e^{tB} e^{-tB} = I_n$, ce qui montre que la matrice e^{tB} est inversible, d'inverse e^{-tB}. On en déduit imédiatement la relation **(1)** de l'énoncé.

3. Supposons la relation **(1)** satisfaite. Les deux membres sont évidemment des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de la variable t. Une première dérivation donne par exemple

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad (A+B)\, e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot A \cdot e^{tB} + e^{tA} \cdot B \cdot e^{tB} = e^{tA}\, (A+B)\, e^{tB}\ .$$

Une deuxième dérivation fournit

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad (A+B)^2\, e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot A(A+B) e^{tB} + e^{tA}\, (A+B)B \cdot e^{tB} = e^{tA}\, (A^2 + 2AB + B^2)\, e^{tB}\ .$$

En évaluant pour $t = 0$, on obtient $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, ce qui se simplifie en $BA = AB$.

4. Des propriétés **(N1)** et **(N2)** de la norme $\|\cdot\|$, on déduit d'abord par récurrence que $\|A^j\| \leq \|A\|^j$ pour tout j entier naturel. Puis, pour tout k entier naturel, par inégalité triangulaire et homogénéité de la norme, on a

$$\Big\| \sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!} \Big\| \leq \sum_{j=0}^{k} \frac{\|A^j\|}{j!} \leq \sum_{j=0}^{k} \frac{\|A\|^j}{j!}$$

Par continuité de la norme (qui est 1-lipschitzienne), en faisant tendre k vers l'infini dans l'inégalité entre les deux termes extrêmes, on obtient $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

5. Sur $\mathbb{C}$ au moins, la matrice A est trigonalisable: il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T, qui sont alors les valeurs propres de A. On a $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Un calcul classique montre que, pour tout k entier naturel, la matrice T^k est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k$. Puis, par combinaisons linéaires, pour tout polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$, la matrice $Q(T)$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $Q(\lambda_1)$, $\cdots$, $Q(\lambda_n)$. Cela vaut en particulier si $Q = Q_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{X^j}{j!}$. Enfin,

$$e^T = \lim_{k\to+\infty} Q_k(T) = \lim_{k\to+\infty} \begin{pmatrix} Q_k(\lambda_1) & & (\times) \\ & \ddots & \\ (0) & & Q_k(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (\times) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} ,$$

donc $\det(e^T) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\mathrm{tr}(A)}$. Enfin, e^A est semblable à e^T (*rappelé dans les préliminaires*), donc elle a le même déterminant.

Partie B. La formule de Trotter-Kato.

6. De la propriété **(N2)** de la norme $\|\cdot\|$ et de **Q4.**, on déduit

$$\|X_k\| \le \left\|\exp\left(\frac{A}{k}\right)\right\| \left\|\exp\left(\frac{B}{k}\right)\right\| \le \exp\left(\frac{\|A\|}{k}\right) \exp\left(\frac{\|B\|}{k}\right) = \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right) ,$$

et, par inégalité triangulaire et croissance de la fonction exponentielle,

$$\|Y_k\| \le \exp\left(\frac{\|A+B\|}{k}\right) \le \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right) .$$

7. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ par théorèmes classiques d'opérations, et on calcule

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad h'(t) = e^{tA}\,(A+B)\,e^{tB} - (A+B)\,e^{t(A+B)} .$$

On observe notamment que $h(0) = 0_n$ et $h'(0) = 0_n$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour les fonctions vectorielles donne alors le développement

$$h(t) = 0_n + t\,0_n + \frac{t^2}{2}\,h''(0) + o(t^2) ,$$

dont nous retiendrons seulement que

$$h(t) = O(t^2) \qquad \text{lorsque } t \to 0 .$$

Il en résulte que

$$X_k - Y_k = h\Big(\frac{1}{k}\Big) = O\Big(\frac{1}{k^2}\Big) \qquad \text{lorsque } k \to +\infty .$$

8. On reconnaît une somme télescopique:

$$\sum_{i=0}^{k-1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \big(X_k^{i+1} Y_k^{k-(i+1)} - X_k^i Y_k^{k-i}\big) = X_k^k - Y_k^k .$$

La question **Q7.** nous apprend qu'il existe un réel strictement positif C tel que, pour k entier naturel assez grand, on ait $\|X_k - Y_k\| \le \dfrac{C}{k^2}$. À l'aide des propriétés de la norme $\|\cdot\|$, on majore:

$$\|X_k^k - Y_k^k\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \left\|X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1}\right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|X_k\|^i \|X_k - Y_k\| \|Y_k\|^{k-i-1} = \|X_k - Y_k\| \sum_{i=0}^{k-1} \|X_k\|^i \|Y_k\|^{k-i-1} .$$

Par ailleurs, grâce à **Q6.**,

$$\|X_k\|^i \|Y_k\|^{k-i-1} \leq \left[\exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)\right]^i \left[\exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)\right]^{k-i-1} = \exp\left((k-1)\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)$$

donc $\|X_k\|^i \|Y_k\|^{k-i-1} \leq \exp\big(\|A\| + \|B\|\big)$. Comme la somme comporte k termes, on aboutit donc à

$$\|X_k^k - Y_k^k\| \leq k \cdot \exp\big(\|A\| + \|B\|\big) \cdot \frac{C}{k^2} ,$$

il en résulte que $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} (X_k^k - Y_k^k) = 0$. Comme (Y_k^k) est une suite constante de valeur e^{A+B}, on conclut que $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} X_k^k = e^{A+B}$, ce qu'il fallait démontrer.

Partie C. Vers les algèbres de Lie.

9. Les matrices considérées ici sont à coefficients réels. Pour de telles matrices, la trace est réelle, donc pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, on a d'après **Q5.**,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{A}_G &\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad \det(e^{tM}) = 1 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad e^{\mathrm{tr}(tM)} = 1 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad t\,\mathrm{tr}(M) = 0 \\ &\iff \mathrm{tr}(M) = 0 . \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{A}_G = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$, c'est l'hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de trace nulle.

10. Notons d'abord que, pour toute matrice A, on a $(e^A)^T = e^{A^T}$: pour le prouver, on procède comme dans **Q1.** et **Q5.**, i.e. on prouve que $(A^k)^T = (A^T)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis que $\big(Q(A)\big)^T = Q(A^T)$ pour tout polynôme Q, puis on passe à la limite en considérant la suite de polynômes (Q_k) introduite dans le corrigé de **Q5.**

Donc si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a $A^T = -A$ donc $(e^{tA})^T\, e^{tA} = e^{tA^T}\, e^{tA} = e^{-tA}\, e^{tA} = e^{0_n} = I_n$ puisque tA et $-tA$ commutent. La matrice e^{tA} est donc orthogonale pour tout t réel. On a ainsi prouvé l'inclusion $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_G$.

Réciproquement, si $A \in \mathcal{A}_G$, pour tout t réel, on a $e^{tA} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, donc $(e^{tA})^T e^{tA} = I_n$, soit $e^{tA^T} = (e^{tA})^{-1}$, soit $e^{tA^T} = e^{-tA}$. En dérivant, on obtient $\forall t \in \mathbb{R} \quad A^T\, e^{tA^T} = -A\, e^{-tA}$, enfin en évaluant pour $t = 0$, il vient $A^T = -A$, donc $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a ainsi prouvé l'inclusion réciproque.

11. Comme $I_n \in G$, on déduit $0_n \in \mathcal{A}_G$. La stabilité par multiplication par un scalaire (réel) est immédiate: si $M \in \mathcal{A}_G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout t réel, $e^{t(\lambda M)} = e^{(\lambda t)M} \in G$, donc $\lambda M \in \mathcal{A}_G$. Enfin, la stabilité par addition résulte de la **Partie 2.** En effet, soient $A \in \mathcal{A}_G$ et $B \in \mathcal{A}_G$, alors pour tout k entier naturel non nul et pour tout t réel, les matrices

$\exp\left(\dfrac{tA}{k}\right)$ et $\exp\left(\dfrac{tB}{k}\right)$ appartiennent à G ; de la structure de groupe de G, on déduit que $\left(\exp\left(\dfrac{tA}{k}\right)\exp\left(\dfrac{tB}{k}\right)\right)^k \in G$. Enfin, G est fermé donc "stable par passage à la limite", on déduit donc de la relation **(2)** démontrée en **Q8.** que $e^{t(A+B)} \in G$. Ceci étant vrai pour tout t réel, on a prouvé que $A+B \in \mathcal{A}_G$.

12. Soient t et s réels. Alors, d'après la propriété rappelée en préambule, on a

$$e^{s\,u(t)} = \exp\Big(e^{tA}\,(sB)\,\big(e^{tA}\big)^{-1}\Big) = e^{tA}\,e^{sB}\,e^{-tA}\ .$$

Les trois matrices de ce produit appartiennent à G, donc $\forall s \in \mathbb{R}\quad e^{s\,u(t)} \in G$, ce qui prouve que $u(t) \in \mathcal{A}_G$.

13. L'application u introduite en **Q12.** est dérivable et $u'(t) = e^{tA}\,[A,B]\,e^{-tA}$. En particulier, $u'(0) = [A,B]$. Comme u est à valeurs dans le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_G$, pour tout k entier naturel non nul on a $k\left(u\Big(\dfrac{1}{k}\Big) - u(0)\right) \in \mathcal{A}_G$. Or, un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel de dimension finie E est toujours fermé (on peut toujours le considérer comme le noyau d'un certain endomorphisme φ de E, par exemple un projecteur, et comme φ est continu d'après le cours, $F = \mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}\big(\{0_E\}\big)$ est fermé). En faisant tendre k vers l'infini, on a alors $u'(0) \in \mathcal{A}_G$, soit $[A,B] \in \mathcal{A}_G$.

14. Soit $M \in \mathcal{A}_G$. Considérons l'application $\gamma : \mathbb{R} \to G$ définie par $\gamma(t) = e^{tM}$. Alors γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$, donc $M \in \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

15. La matrice M est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, soit $M = PTP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ qui sont les valeurs propres complexes de M. Pour tout t réel, on a alors

$$\begin{aligned}
\delta_M(t) &= \det\big(P(I_n+tT)P^{-1}\big) = \det(I_n+tT) = \prod_{i=1}^{n}(1+t\lambda_i)\\
&= (1+t\lambda_1)\cdots(1+t\lambda_n)\\
&= 1 + t\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right) + o(t) \qquad \text{lorsque } t \to 0\\
&= 1 + t\,\mathrm{tr}(M) + o(t)\ .
\end{aligned}$$

Comme δ_M admet un développement limité à l'ordre un en zéro, elle est dérivable en ce point, avec $\delta'_M(0) = \mathrm{tr}(M)$.

16. L'application det étant différentiable en tout point, on a, d'après le cours, la dérivabilité de δ_M avec $\delta'_M(t) = \mathrm{d}(\det)(I_n+tM)\cdot M$, en particulier

$$\delta'_M(0) = \mathrm{d}(\det)(I_n)\cdot M\ ,$$

et ceci pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La forme linéaire $\mathrm{d}(\det)(I_n)$, i.e. la différentielle du déterminant en I_n est donc $M \mapsto \mathrm{tr}(M)$.

17. • Avec $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, prenons $M \in \mathcal{T}_{I_n}(G)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a $\det\big(\gamma(t)\big) = 1$, ce qui se dérive en $\mathrm{d}(\det)\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t) = 0$ et, en évaluant pour $t = 0$, on obtient $\mathrm{d}(\det)(I_n) \cdot M = 0$, soit $\mathrm{tr}(M) = 0$, donc $M \in \mathcal{A}_G$ d'après **Q9.** Avec **Q14.**, on a prouvé que $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.

• Avec $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, prenons $M \in \mathcal{T}_{I_n}(G)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a $\big(\gamma(t)\big)^T \cdot \gamma(t) = I_n$, ce qui se dérive en $\big(\gamma'(t)\big)^T \cdot \gamma(t) + \big(\gamma(t)\big)^T \cdot \gamma'(t) = 0_n$ et, pour $t = 0$, on obtient $M^T + M = 0_n$, donc $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Avec **Q10.** et **Q14.**, de nouveau on a montré que $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.

Partie D. Comportement asymptotique de f_A.

18. Notons u l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A. Soit ε_1 un vecteur propre de u pour la valeur propre α, et ε_2 un vecteur propre de u pour la valeur propre β. Comme $\chi_u = \chi_A = (X-\alpha)(X-\beta)^2$ annule u d'après Cayley-Hamilton, le lemme des noyaux nous apprend que $\mathbb{C}^3 = F_1 \oplus F_2$ avec $F_1 = \mathrm{Ker}(u - \alpha\,\mathrm{Id}_E)$ et $F_2 = \mathrm{Ker}\big((u-\beta\,\mathrm{Id}_E)^2\big)$. Comme $\dim(F_1) = 1$ car la valeur propre α est simple, on a $\dim(F_2) = 2$. Comme (ε_2) est une famille libre dans F_2, on peut la compléter en une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de F_2, et alors $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$. Enfin, F_2 est stable par u, donc il existe a et b scalaires tels que $u(\varepsilon_3) = a\varepsilon_2 + b\varepsilon_3$. Comme $\mathrm{Tr}(u) = \alpha + 2\beta$, on a $b = \beta$, ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$, ce qui montre que A est semblable à T pour une certaine valeur de a. *On peut s'arranger pour avoir $a = 1$.*

On décompose T en $T = D + N$, avec $D = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \beta)$ et $N = aE_{2,3}$, ces deux matrices commutent et $N^2 = 0$. La formule du binôme donne alors, pour tout n entier naturel non nul,

$$T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & na\beta^{n-1} \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}.$$

Ensuite, pour tout t réel,

$$e^{tT} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\,T^n = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\,\alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\,\beta^n & \displaystyle a\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-1)!}\,\beta^{n-1} \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\,\beta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\beta} & ate^{t\beta} \\ 0 & 0 & e^{t\beta} \end{pmatrix}.$$

Comme $\left|e^{t\alpha}\right| = e^{t\cdot\mathrm{Re}(\alpha)}$, on voit que les coefficients diagonaux ont une limite nulle en $+\infty$ si et seulement si $\Big(\mathrm{Re}(\alpha) < 0 \text{ et } \mathrm{Re}(\beta) < 0\Big)$, cette condition est donc nécessaire pour que l'on ait $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{tT} = 0_3$. Elle est aussi suffisante puisque, si elle est réalisée, par croissances comparées, le coefficient d'indices $(2,3)$ aura aussi une limite nulle en $+\infty$.

Enfin, A étant semblable à T, on peut écrire $A = PTP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ et, d'après une propriété rappelée en préambule, on aura alors $e^{tA} = P\,e^{tT}\,P^{-1}$ pour tout t réel, et donc aussi $e^{tT} = P^{-1}\,e^{tA}\,P$. De la continuité du produit matriciel, on déduit finalement que

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = 0_3 \iff \lim_{t\to+\infty} e^{tT} = 0_3 \iff \Big(\operatorname{Re}(\alpha) < 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(\beta) < 0\Big) .$$

19. Il s'agit de montrer que les valeurs propres de A ont toutes une partie réelle strictement négative. Soit donc $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, soit Z un vecteur propre associé, i.e. $Z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $Z \neq 0$ et $AZ = \lambda Z$. Soit t un réel. On a alors $P(A) \cdot Z = P(\lambda)\, Z$ pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ par un calcul classique, donc en particulier si P est l'un des polynômes $P_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{t^j X^j}{j!}$, puis $e^{tA} \cdot Z = e^{t\lambda}\, Z$ en faisant tendre k vers l'infini, par continuité du produit matriciel. Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = 0_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on déduit $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{t\lambda}\, Z = \lim_{t\to+\infty} e^{tA} \cdot Z = 0$ dans $\mathbb{C}^n$ (encore par continuité du produit matriciel). Au moins une des coordonnées z_i $(1 \leq i \leq n)$ du vecteur Z est non nulle. De $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{t\lambda} z_i = 0$, on déduit $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{t\lambda} = 0$, puis $\left|e^{t\lambda}\right| = e^{t\,\operatorname{Re}(\lambda)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit enfin que $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, ce qu'il fallait prouver.

20. On sait que $\chi_A = \displaystyle\prod_{\lambda\in\operatorname{Sp}(A)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$. Le théorème de Cayley-Hamilton dit que $\chi_A(A) = 0_n$. Les polynômes $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ étant deux à deux premiers entre eux, le lemme de décomposition des noyaux donne l'égalité

$$\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker}\big(\chi_A(A)\big) = \bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Sp}(A)} F_\lambda .$$

21. Indexons les valeurs propres **distinctes** de A sous la forme $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ et, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, posons $F_i = F_{\lambda_i}$ pour simplifier, $m_i = m_{\lambda_i}$, puis $d_i = \dim(F_i)$. Chaque "sous-espace caractéristique" $F_i = \operatorname{Ker}\big((u-\lambda_i \operatorname{Id}_E)^{m_i}\big)$ est stable par u puisque c'est le noyau d'un polynôme en u, et l'endomorphisme u_i induit par u sur F_i admet pour polynôme annulateur $(X-\lambda_i)^{m_i}$, donc $u_i = \lambda_i \operatorname{Id}_{F_i} + \nu_i$, où ν_i est un endomorphisme nilpotent de F_i. Dans une base $\mathcal{B}_i$ de F_i, l'endomorphisme induit u_i est donc représenté par une matrice de la forme $\lambda_i I_{d_i} + N_i$, où $N_i \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{C})$ est nilpotente. Dans la base $\mathcal{B}$ de E obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_i$, l'endomorphisme u est donc représenté par la matrice diagonale par blocs

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{d_1} + N_1, \cdots, \lambda_k I_{d_k} + N_k) .$$

Si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vers la base $\mathcal{B}$, on a alors $A = P\Delta P^{-1}$. Enfin, $\Delta = D + N$ où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{d_1}, \cdots, \lambda_k I_{d_k})$ est diagonale, et $N = \operatorname{diag}(N_1, \cdots, N_k)$ est nilpotente. En effet, si $N_i^{p_i} = 0_{d_i}$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, alors $N^p = 0_n$ en posant $p = \displaystyle\max_{1\leq i\leq k} p_i$. Donc $A = P(D+N)P^{-1}$. Chaque matrice N_i commute avec $\lambda_i I_{d_i}$ qui est une matrice scalaire, donc par un calcul par blocs, D et N commutent. Enfin, chaque endomorphisme induit u_i sur F_i admet pour seule valeur propre λ_i, donc admet pour polynôme caractéristique $(X-\lambda_i)^{d_i}$. Par un calcul par blocs,

$$\chi_A = \chi_u = \prod_{i=1}^{k} \chi_{u_i} = \prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)^{d_i} = \chi_D$$

(ce qui montre au passage l'égalité $d_i = m_i$ pour tout i).

22. Soit p l'indice de nilpotence de la matrice N, i.e. $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid N^k = 0\}$. Comme tD et tN commutent pour tout réel t, on a

$$e^{tA} = e^{P(tD+tN)P^{-1}} = P\, e^{t(D+N)}\, P^{-1} = P\, e^{tD}\, e^{tN}\, P^{-1} = P\, e^{tD} \left(\sum_{k=0}^{p-1} t^k\, \frac{N^k}{k!} \right) P^{-1}\, .$$

La matrice e^{tD} est diagonale, de coefficients diagonaux $e^{t\lambda_1}, \cdots, e^{t\lambda_n}$, où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres (**non nécessairement distinctes**) de D, et donc aussi de A d'après **Q21.** Si l'on note $\nu_{i,j}^{(k)}$ le coefficient d'indices (i,j) de la matrice N^k, $w_{i,j}(t)$ celui de la matrice $e^{t(D+N)} = e^{tD} e^{tN}$, on a donc, par le calcul des coefficients d'un produit matriciel,

$$w_{i,j}(t) = e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\nu_{i,j}^{(k)}}{k!}\, t^k\, .$$

Comme, pour $t > 0$, $\left|e^{t\lambda_i}\right| = e^{t\ \mathrm{Re}(\lambda_i)} \leq e^{\alpha t}$, on a alors $w_{i,j}(t) = O(t^{p-1}e^{\alpha t})$ lorsque $t \to +\infty$. Enfin, le calcul de $v_{i,j}(t)$ fait intervenir la multiplication à gauche par P, à droite par P^{-1}, et comme ces matrices de passage sont indépendantes de la variable t, chaque fonction $v_{i,j}$ est combinaison linéaire des fonctions $w_{r,s}$, $(1 \leq r, s \leq n)$, on en déduit que $v_{i,j}(t) = O(t^{p-1}e^{\alpha t})$ lorsque $t \to +\infty$.

23. On a vu en **Q19.** qu'une condition nécessaire pour que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{tA} = 0_n$ était que $\alpha < 0$. Réciproquement, cette condition est suffisante puisque, si elle est réalisée, la question **Q22.** ci-dessus montre, par croissances comparées, que $\lim\limits_{t \to +\infty} v_{i,j}(t) = 0$ pour tout couple (i,j), donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{tA} = 0_n$.

On conclut donc que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{tA} = 0_n$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

24. Le sens indirect est évident.

Réciproquement, procédons par contraposition. Commençons par trigonaliser A: on a $A = QTQ^{-1}$ avec $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ qui sont les valeurs propres de A. Si $X \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur non nul, alors $e^{tA} = Q\, e^{tT}\, Q^{-1}$, et $e^{tA}X = Q\, e^{tT}\, Y$ en posant $Y = Q^{-1}X = (y_1, \cdots, y_n)$. Comme Y est un vecteur non nul, on peut considérer l'indice $p = \max\left\{k \in [\![1,n]\!] \mid y_k \neq 0\right\}$, ainsi $Y = (y_1, \cdots, y_p, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{C}^n$ avec $y_p \neq 0$. La matrice e^{tT} est aussi triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $e^{t\lambda_1}, \cdots, e^{t\lambda_n}$ (*cf.* **Q5.**). En effectuant le produit matriciel

$$e^{tT}\, Y = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & & & (\times) \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{t\lambda_p} & & & \\ & & & e^{t\lambda_{p+1}} & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

on observe que la p-ième coordonnée de ce produit vaut $y_p\, e^{t\lambda_p}$, elle a donc pour module $|y_p|\, e^{t\ \mathrm{Re}(\lambda_p)}$ et, comme $\mathrm{Re}(\lambda_p) \geq 0$ et $y_p \neq 0$, elle ne tend pas vers 0 lorsque t tend vers

$+\infty$. Donc le vecteur $e^{tT}Y$ ne tend pas vers 0, et donc le vecteur $e^{tA}\,X = Q\,e^{tT}Y$ non plus (raisonner par contraposition, en utilisant la continuité du produit matriciel).

25. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = P_s\,P_i\,P_n$, et ces trois facteurs sont deux à deux premiers entre eux (ils sont deux à deux sans racine commune). Comme $\chi_A(A) = 0_n$ par Cayley-Hamilton, le lemme de décomposition des noyaux donne immédiatement

$$E = \mathbb{C}^n = E_s \oplus E_i \oplus E_n\ .$$

Chacun des trois sous-espaces E_s, E_i, E_n est stable par u (car ces sous-espaces sont des noyaux de polynômes en u), notons u_s, u_i et u_n les endomorphismes induits. Chacun des trois sous-espaces est alors stable par tout polynôme en l'endomorphisme u, puis en passant à la limite comme en **Q1.** est stable aussi par l'endomorphisme e^{tu} (représenté par la matrice e^{tA}) pour tout t réel. *En effet, tout s.e.v. est fermé en dimension finie, ce qui justifie ce passage à la limite.*

L'endomorphisme u_s de E_s n'a que des valeurs propres de partie réelle strictement négative puisqu'il admet P_s pour polynôme annulateur. Il résute alors de **Q23.** que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tu_s} = 0$ (endomorphisme nul de E_s), ou encore que, pour tout vecteur X de E_s, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0$.

L'endomorphisme u_i de E_i n'a que des valeurs propres de partie réelle strictement positive puisqu'il admet P_i pour polynôme annulateur. Il résute alors de **Q24.** que, si X est un vecteur de E_i, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0$ si et seulement si $X = 0$. Même remarque pour un vecteur X de E_n puisque u_n n'a que des valeurs propres de partie réelle nulle.

Munissons chacun des sous-espaces E_s, E_i, E_n d'une norme, ces normes seront notées respectivement $\|\cdot\|_s$, $\|\cdot\|_i$ et $\|\cdot\|_n$. Pour tout vecteur X de $E = \mathbb{C}^n$, se décomposant en $X = X_s + X_i + X_n$, posons

$$\|X\|_E = \|X_s\|_s + \|X_n\|_n + \|X_i\|_i\ .$$

Il est immédiat que $\|\cdot\|_E$ est alors une norme sur E.

Si X est un vecteur de $\mathbb{C}^n$ se décomposant en $X = X_s + X_i + X_n$, alors la décomposition du vecteur $e^{tA}X$ est $e^{tA}X = e^{tA}X_s + e^{tA}X_i + e^{tA}X_n$, donc

$$\|e^{tA}X\|_E = \|e^{tA}X_s\|_s + \|e^{tA}X_i\|_i + \|e^{tA}X_n\|_n\ .$$

Il est donc clair que l'on a l'équivalence

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0 \iff \begin{cases} \mathbf{(1)}: & \lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}X_s = 0 \\ \mathbf{(2)}: & \lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}X_i = 0 \\ \mathbf{(3)}: & \lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}X_n = 0 \end{cases}\ .$$

Par les remarques ci-dessus, la condition **(1)** est satisfaite pour tout vecteur X_s de E_s, et les conditions **(2)** et **(3)** sont satisfaites si et seulement si $X_i = X_n = 0$.

Finalement,

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0 \iff X_i = X_n = 0 \iff X \in E_s\ .$$

26. • Soit $X \in E_n$, alors $e^{tA}X = e^{tu_n}(X)$ (notation u_n introduite ci-dessus), et l'endomorphisme u_n de E_n n'a que des valeurs propres imaginaires pures, on peut donc appliquer **Q22.** avec $\alpha = 0$ pour affirmer qu'il existe un entier naturel p tel que $v_{i,j}(t) = \left(e^{tA_n}\right)_{i,j} = O(t^p)$ lorsque $t \to +\infty$, A_n étant la matrice représentant u_n dans une certaine base de E_n. Lorsque t tend vers $+\infty$, les coordonnées dans cette base du vecteur $e^{tA}X$ sont alors aussi $O(t^p)$, puis finalement, quelle que soit la norme choisie sur E_n puisqu'elles sont équivalentes, $\|e^{tA}X\|_E = \|e^{tA}X\|_n = O(t^p)$ lorsque t tend vers $+\infty$. On a le même résultat lorsque $t \to -\infty$ en remplaçant u_n par $-u_n$, qui est aussi à valeurs propres imaginaires pures. Il existe donc des constantes positives B, B', K, K' telles que

$$t \geq B \Longrightarrow \|e^{tA}X\|_E \leq K\, t^p \qquad \text{et} \qquad t \leq -B' \Longrightarrow \|e^{tA}X\|_E \leq K'\, |t|^p \ .$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{\|e^{tA}X\|_E}{(1+|t|)^p}$ est alors continue sur $\mathbb{R}$, bornée sur $]-\infty, -B']$ et sur $[B, +\infty[$, et elle est aussi bornée sur $[-B', B]$ car c'est un segment, elle est finalement bornée sur $\mathbb{R}$. On a ainsi prouvé l'inclusion

$$E_n \subset \left\{X \in E \;\middle|\; \exists C \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists p \in \mathbb{N} \;\; \forall t \in \mathbb{R} \quad \|e^{tA}X\|_E \leq C\,\big(1+|t|\big)^p\right\} \ .$$

• Soit $X \in \mathbb{C}^n \setminus E_n$, écrivons $X = X_s + X_i + X_n$, au moins l'un des deux vecteurs X_s ou X_i étant non nul. Si, par exemple, X_i est non nul, le raisonnement de **Q24.** montre que l'une des coordonnées (dans une base de trigonalisation de u_i) du vecteur $e^{tA}X_i = e^{tu_i}(X_i)$ a une croissance exponentielle lorsque t tend vers $+\infty$. Il en résulte que $\|e^{tA}X_i\|_i$ n'est dominé par aucun monôme t^p lorsque $t \to +\infty$. Alors $\|e^{tA}X\|_E \geq \|e^{tA}X_i\|_i$ n'est pas dominé non plus par un monôme t^p en $+\infty$. Même raisonnement lorsque $t \to -\infty$ si la composante X_s est non nulle. Donc $X \notin \left\{X \in E \;\middle|\; \exists C \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists p \in \mathbb{N} \;\; \forall t \in \mathbb{R} \quad \|e^{tA}X\|_E \leq C\,\big(1+|t|\big)^p\right\}$, ce qui prouve l'inclusion inverse.