MP* 1 (Rabat)
Groupe 2

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مُمُوني مُولَاي اسْمَاعِيل

DS N° 4 : EVN & Algèbre

Durée : 4 heures

Epreuve B : Cocktail Mines-CCP

Problème 1 : CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

Notations

- Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, p désigne un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On note I_p la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
- Si $x = (x_1, \dots, x_p)$ est un vecteur de $\mathbb{K}^p$, on note $\|x\|_\infty$ sa norme «infinie» définie par :
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \quad | \quad i \in [\![1, p]\!]\}.$$
- On dit que x est un vecteur stochastique si ses coordonnées sont positives ou nulles et leur somme vaut 1 :
$$\forall i \in [\![1, p]\!], \ x_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} x_i = 1.$$
- Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes vaut 1, c'est-à-dire si :
$$\forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2, a_{i,j} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, p]\!], \quad \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1.$$
- Une matrice A est dite strictement positive si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors $A > 0$.
- Si $b_1, b_2, \dots, b_k$ sont des nombres complexes (respectivement des matrices carrées), on note $\operatorname{diag}(b_1, b_2, \dots, b_k)$ la matrice diagonale (respectivement diagonale par blocs) dont les coefficients diagonaux (respectivement blocs diagonaux) sont $b_1, b_2, \dots, b_k$.

Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Q8. Justifier que 1 est valeur propre de A (on pourra considérer le vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$ dont toutes les coordonnées valent 1).

Q9. Soit x un vecteur colonne de $\mathbb{C}^p$. Démontrer que $\|Ax\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty$.

Q10. En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

Localisation des valeurs propres

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.

Q11. Justifier l'existence d'un vecteur colonne $x = (x_1, \dots, x_p)$ de $\mathbb{C}^p$ tel que $\|x\|_\infty = 1$ et $Ax = \lambda x$.

Q12. Soit $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $|x_i| = 1$. Démontrer que :

$$|\lambda - a_{i,i}| \leqslant 1 - a_{i,i}.$$

Étude d'un exemple

Q13. Dans cette question uniquement, on prend :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Déduire de la question précédente que les valeurs propres de A sont contenues dans la réunion de trois disques, que l'on représentera en précisant leurs centres et leurs rayons.

On constate en particulier sur l'exemple que 1 est la seule valeur propre de A de module 1. On admettra, dans la suite du problème, que cette propriété reste vraie pour toute matrice stochastique **strictement positive**.

Cas des matrices stochastiques strictement positives

Q14. On suppose en plus pour cette question et la question suivante que la matrice A est strictement positive. On pose $B = A - I_p$ et on note B' la matrice de $\mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{R})$ obtenue en supprimant la dernière colonne et la dernière ligne de B.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de B'.

On admet qu'il existe un entier $i \in [\![1, p-1]\!]$ tel que :

$$|\lambda - (a_{i,i} - 1)| \leqslant 1 - a_{i,i} - a_{i,p}.$$

La démonstration (non demandée) de cette inégalité est similiaire à celle de la question **Q12**.

Déduire de cette inégalité que B' est inversible.

Q15. En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(A - I_p) = 1$.

On admet sans démonstration que 1 est racine simple du polynôme caractéristique de A. On dit alors que 1 est une valeur propre simple de A. Nous pouvons résumer les résultats de cette partie par la **Proposition 1** ci-dessous.

Proposition 1. *Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ strictement positive. Alors 1 est valeur propre simple et les autres valeurs propres ont un module strictement inférieur à 1.*

Partie III - Itérées d'une matrice stochastique

On démontre dans cette partie la proposition suivante :

Proposition 2. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, stochastique et strictement positive, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.*

Un contre-exemple

Q16. On considère s la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. Donner, sans justification, la matrice B de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Q17. La **Proposition 2** reste-t-elle vraie si la matrice stochastique n'est pas strictement positive ?

Résultat préliminaire

Soit λ un nombre complexe avec $|\lambda| < 1$ et N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Q18. Démontrer que $N^p = 0$.

Q19. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que pour n au voisinage de $+\infty$, $\binom{n}{k}$ est équivalent à $\frac{n^k}{k!}$. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\binom{n}{k}\lambda^{n-k}$.

Q20. En déduire que la suite de matrices $((\lambda I_p + N)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Convergence d'une suite de matrices

Soit A une matrice stochastique et strictement positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On sait, d'après la **Proposition 1**, que 1 est valeur propre simple de A. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les autres valeurs propres complexes de A, un théorème du cours montre que A est semblable sur $\mathbb{C}$ à une matrice diagonale par blocs du type

$$\operatorname{diag}(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_r I_{p_r} + N_r) \ ,$$

avec $p_1, \dots, p_r$ des entiers et $N_1, \dots, N_r$ des matrices nilpotentes à coefficients complexes.

Q21. Déduire des questions **Q18** à **Q20** que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Problème 2 : CONCOURS COMMUN MINES PONTS

Étude d'un endormorphisme d'un espace de fonctions numériques

---

Soit I un intervalle de la forme $[-a, a]$ où a est un réel strictement positif. Dans tout le problème, on considère les ensembles suivants :

- $\mathcal{E}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué des applications de I dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ ;
- $\mathcal{P}$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée de ses éléments polynomiaux.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$$

et si $f \in \mathcal{E}$, on note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de I dans $\mathbb{C}$ définies par les formules :

$$(\forall x \in I) \qquad \begin{cases} u(f)(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x \sin t) \,\mathrm{d}t \\[2ex] v(f)(x) = f(0) + x \displaystyle\int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) \,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

Les candidats devront justifier leurs affirmations.

A Préliminaires

1. Justifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$.

2. Montrer que si $f \in \mathcal{E}$, $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définies et appartiennent à $\mathcal{E}$, et que l'on définit ainsi des endomorphismes u et v de $\mathcal{E}$.

3. Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par u et par v.

4. Établir pour $n \in \mathbb{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

5. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

B Étude de la continuité de u et v

On considère la norme M de $\mathcal{E}$ définie pour tout $f \in \mathcal{E}$ par la formule

$$M(f) = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

6. Vérifier que M est bien définie et montrer que u est une application continue de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même.

7. L'application v est-elle continue de $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même ?

8. Vérifier que l'application $N : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ définie par $N(f) = M(f) + M(f')$ est une norme sur $\mathcal{E}$, et montrer que v est continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$. Les normes M et N sont-elles équivalentes ?

9. Si $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $f(0) = p(0)$ et $|f'(x) - p'(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in I$. En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, N)$.

C Étude de l'inversibilité de u et v

10. Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ à $\mathcal{P}$.

11. Déterminer $(u \circ v)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Le réel 0 est-il valeur propre de l'endomorphisme v ?

12. Déterminer également $(v \circ u)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Conclure.

Applications.

13. Pour tout $f \in \mathcal{E}$, donner une relation liant $v(f)$ et $u(f')$. Calculer $u(\arctan')$ à l'aide du changement de variable $z = \tan t$ et en déduire $u(\operatorname{argsh}'')$.

14. Montrer que $f \in \mathcal{E}$ est paire (respectivement impaire) si et seulement si $u(f)$ l'est. Qu'en est-il pour v ?