My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مَمُوني مُولاَي اسمَاعيل

DS N° 4 : EVN & Algèbre

Durée : 4 heures

Epreuve B : Cocktail

Problème 1 : CONCOURS COMMUN INP

Dans ce problème, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Partie I

Q6. Un exemple

Vérifier que la matrice $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Démontrer que les matrices $\Pi_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ et $\Pi_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteur puis calculer $\Pi_1+5\Pi_2$, $\Pi_1+\Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

Q7. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux :
Si $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T, si u est un endomorphisme de E alors :

$$\operatorname{Ker}[T(u)]=\operatorname{Ker}(P_1(u))\oplus\operatorname{Ker}(P_2(u))\oplus\ldots\oplus\operatorname{Ker}(P_r(u)).$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r=2$.

Soit u un endomorphisme de E et soit P et Q deux polynômes premiers entre eux.
Justifier que $\operatorname{Ker}(P(u))\subset\operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\operatorname{Ker}(Q(u))\subset\operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$).

Démontrer que : $\operatorname{Ker}[(PQ)(u)]=\operatorname{Ker}(P(u))\oplus\operatorname{Ker}(Q(u))$.

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

Q8. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal.
On suppose que $\pi_u=P_1^{k_1}P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i\in\{1,2\}$, $Q_i=\dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.
Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1+R_2Q_2=1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u=P_1^{k_1}P_2^{k_2}\ldots P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i\in\{1,2,\ldots,m\}$, $Q_i=\dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1+R_2Q_2+\ldots+R_mQ_m=1$.

Q9. On pose alors pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.
Démontrer que pour tout couple (i,j) d'entiers distincts de $\{1,2,...,m\}$, on a les trois résultats suivants :

$$p_i \circ p_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E,$$

et chaque p_i est un projecteur de E.
Les p_i seront appelés projecteurs associés à u.

Q10. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique : $\chi_u = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ (avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $N_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique associé à λ_i.
Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_m$.

Q11. Démontrer que $E = \mathrm{Im}\, p_1 \oplus \mathrm{Im}\, p_2 \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\, p_m$.

Q12. Démontrer que pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $\mathrm{Im}\, p_i = N_i$.

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

Q13. Quel est alors le polynôme minimal π_u de u ?

Q14. On note toujours, pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.

Donner, sans détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$ puis démontrer que les projecteurs associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $p_i = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

Q15. Démontrer que $X = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u).

Q16. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que la matrice *A* est diagonalisable et calculer la matrice A^2.

b) En déduire le polynôme minimal π_A de la matrice *A* puis la décomposition spectrale de la matrice *A*. On notera Π_1 et Π_2 les matrices des projecteurs associés.

c) Calculer, pour tout entier naturel *q*, A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2.

Q17. On note $\mathbb{C}[v]$ l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme *v* d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[v]$ est égal au degré du polynôme minimal π_v de l'endomorphisme *v*.

Q18. On revient au cas *u* diagonalisable avec $\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X \quad \lambda_i)$.

Démontrer que la famille $(p_1, p_2, ..., p_m)$ des projecteurs associés à *u* est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$.

Q19. Dans le cas d'un endomorphisme *u* non diagonalisable, la famille $(p_1, p_2, ..., p_m)$ des projecteurs associés à *u* est-elle toujours une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$?

Q20. Nous avons vu que si *u* est un endomorphisme de *E* diagonalisable, il existe *m* endomorphismes non nuls p_i de *E*, tels que pour tout entier *q* on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q p_i$.

Nous allons étudier une « réciproque ».

Soit *u* un endomorphisme de *E*, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe *m* endomorphismes non nuls f_i de *E* et *m* complexes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel *q* on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q f_i$.

Démontrer que *u* est diagonalisable.

Problème 2 :

A.. Etude d'une norme sur $\mathcal{L}(E)$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Soit u un endomorphisme de E.

1 ▷ Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer que :

$$\sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|u(x)\|.$$

2 ▷ On note $|||u||| = \sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Montrer que $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

3 ▷ Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||uv||| \leqslant |||u|||.|||v|||,$$

et en déduire une majoration de $|||u^k|||$, pour tout entier naturel k, en fonction de $|||u|||$ et de l'entier k.

B.. Etude de la stabilité en 0 du système linéaire

Dans cette partie, a désigne un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$.

4 ▷ Montrer qu'il existe un entier naturel non nul r, des nombres complexes distincts λ_1, λ_2, ..., λ_r, ainsi que des entiers naturels non nuls m_1, m_2, ..., m_r, tels que :

$$\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i,$$

où pour $i \in [\![1;r]\!]$, $E_i = Ker(a - \lambda_i id_{\mathbf{C}^n})^{m_i}$.

D'après la question précédente, si x est un élément de $\mathbf{C}^n$, il existe un unique r-uplet $(x_1,\dots,x_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i$. Fixons à présent $i \in [\![1;r]\!]$. On définit alors les endomorphismes :

$$p_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n & \to & E_i \\ x & \mapsto & x_i \end{array} \right. \quad \text{et} \quad q_i : \left| \begin{array}{ccc} E_i & \to & \mathbf{C}^n \\ x_i & \mapsto & x_i \end{array} \right. .$$

Par ailleurs, on note $|||.|||_i$ la norme sur $\mathcal{L}(E_i)$ introduite à la partie A, à savoir

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||u|||_i = \sup_{\substack{x\in E_i\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On utilisera la notation $|||.|||_c$ pour $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. Enfin, on notera a_i l'endomorphisme $p_i a q_i$.

5 ▷ Montrer que, pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, il existe une constante $C_i > 0$ telle que :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||q_i u p_i|||_c \leqslant C_i |||u|||_i.$$

6 ▷ Montrer que, pour $i \in [\![1;r]\!]$, E_i est stable par a.

7 ▻ Soient $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. Exprimer $p_i q_j$ puis $\sum_{i=1}^{r} q_i p_i$ en fonction des endomorphimes $id_{\mathbf{C}^n}$ et id_{E_j}.

8 ▻ Montrer que : $a = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i$.

9 ▻ En déduire que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad e^{ta} = \sum_{i=1}^{r} q_i e^{ta_i} p_i.$$

10 ▻ Montrer par ailleurs que :

$$\forall i \in [\![1;r]\!], \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad |\!|\!| e^{ta_i} |\!|\!|_i \leqslant |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |\!|\!| a_i - \lambda_i id_{E_i} |\!|\!|_i^k.$$

11 ▻ En déduire l'existence d'un polynôme P à coefficients réels tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |\!|\!| e^{ta} |\!|\!|_c \leqslant P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{tRe(\lambda_i)},$$

où $Re(z)$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe z.

12 ▻ Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on notera u_A l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbf{R}^n$ et v_A l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à A, vue comme une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On conservera la notation $|\!|\!| . |\!|\!|_c$ pour la norme introduite à la partie A sur $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ et on utilisera $|\!|\!| . |\!|\!|_r$ sur $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad |\!|\!| e^{tu_A} |\!|\!|_r \leqslant C |\!|\!| e^{tv_A} |\!|\!|_c.$$

Dans la suite de cette partie, on considère u un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sa matrice dans la base canonique. On notera par ailleurs, $Sp(A)$ le spectre complexe de A. Notons g_{x_0} l'unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ de :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y' & = & u(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. .$$

13 ▻ Montrer que :

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}^n, \quad \lim_{t \to +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Sp(A) \subset \mathbf{R}_-^* + i\mathbf{R}.$$

14 ▻ On se place dans cette question dans le cas où toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative. Montrer alors qu'il existe deux constantes C_2 et α strictement positives telles que :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad |\!|\!| e^{tu} |\!|\!|_r \leqslant C_2 e^{-\alpha t},$$

et en déduire une majoration de $\|g_{x_0}(t)\|$ pour $t \in \mathbf{R}_+$.

Corrigé

Epreuve B : Cocktail

Problème 1 : CCP (2023)

Partie I

Q6. La matrice A est symétrique réelle et donc la matrice A est diagonalisable d'après le théorème spectral.

$\Pi_1^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \Pi_1$. Donc, Π_1 est une matrice de projecteur.

$\Pi_2^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \Pi_2$. Donc, Π_2 est une matrice de projecteur.

$$\Pi_1 + 5\Pi_2 = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$$\Pi_1\Pi_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Q7. Soit $x \in E$. $x \in \mathrm{Ker}(P(u)) \Rightarrow (P(u))(x) \Rightarrow Q(u)((P(u))(x)) = 0 \Rightarrow (Q(u) \circ P(u))(x) = 0 \Rightarrow ((QP)(u))(x) = 0$
$\Rightarrow ((PQ)(u))(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}((PQ)(u))$.

Donc, $\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \mathrm{Ker}((PQ)(u))$. De même, $\mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}((PQ)(u))$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}((PQ)(u))$. Les polynômes P et Q sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$. En évaluant en u, on obtient $U(u) \circ P(u) + V(u) \circ Q(u) = \mathrm{Id}_E$ puis en évaluant en x, on obtient $x = (U(u) \circ P(u))(x) + (V(u) \circ Q(u))(x) \quad (*)$.

Posons $y = (V(u) \circ Q(u))(x)$ et $z = (U(u) \circ P(u))(x)$. Puisque deux polynômes en u commutent (et en tenant compte de $P(u) \circ Q(u)(x) = ((PQ)(u))(x) = 0$), $P(u)(y) = V(u)((P(u) \circ Q(u))(x)) = 0$

et de même, $Q(u)(z) = U(u)(P(u) \circ Q(u))(x)) = 0$. Donc, $y \in \mathrm{Ker}(P(u))$ et $z \in \mathrm{Ker}(Q(u))$. On a montré que, pour tout $x \in \mathrm{Ker}((PQ)(u))$, il existe $(y, z) \in \mathrm{Ker}(P(u)) \times \mathrm{Ker}(Q(u))$ tel que $x = y + z$ et donc $\mathrm{Ker}((PQ)(u)) = \mathrm{Ker}(P(u)) + \mathrm{Ker}(Q(u))$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(u)) \cap \mathrm{Ker}(Q(u))$. $(*)$ fournit directement $x = 0$ et donc $\mathrm{Ker}(P(u)) \cap \mathrm{Ker}(Q(u)) = \{0\}$. On a montré que

$$\mathrm{Ker}((PQ)(u)) = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u)).$$

Q8. $Q_1 = P_2^{k_2}$ et $Q_2 = P_1^{k_1}$. Puisque P_1 et P_2 sont premiers entre eux, il en est de même de Q_1 et Q_2. D'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes R_1 et R_2 tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.

Q9. • Soit $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Puisque deux polynômes en u commutent,

$$p_i \circ p_j = R_i(u) \circ Q_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_j(u) = R_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_i(u) \circ P_i^{k_i}(u) \circ \prod_{l \neq i,\, l \neq j} P_l^{k_l}(u) = R_i(u) \circ R_j(u) \circ \prod_{l \neq i,\, l \neq j} P_l^{k_l}(u) \circ \pi_u(u) = 0$$

car $\pi_u(u) = 0$ par définition de π_u.

• Puisque $R_1Q_1 + \ldots + R_mQ_m = 1$, en évaluant en u, on obtient $R_1(u) \circ Q_1(u) + \ldots + R_m(u) \circ Q_m(u) = \mathrm{Id}_E$ ou encore $p_1 + \ldots + p_m = \mathrm{Id}_E$.

• Soit $i \in [\![1, m]\!]$.
$$p_i^2 = p_i \circ \left(\mathrm{Id}_E - \sum_{j \neq i} p_j\right) = p_i - \sum_{j \neq i} p_i \circ p_j = p_i$$

et donc p_i est un projecteur.

Q10. Les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, sont deux à deux premiers entre eux, car deux à deux sans racine commune dans $\mathbb{C}$. De plus, $\chi_u = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est annulateur de u d'après le théorème de Cayley-Hamilton ou encore $\mathrm{Ker}\,(\chi_u(u)) = E$. D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$E = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_m.$$

Q11. D'après la question Q9, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i = \mathrm{Id}_E$. On en déduit que, pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{i=1}^{m} p_i(x) \in \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\,(p_i)\,.$$

Ceci montre que $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\,(p_i)$.

Soit $i \in [\![1, m]\!]$. Montrons que $\mathrm{Im}\,(p_i) \cap \displaystyle\sum_{j \neq i} \mathrm{Im}\,(p_j) = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(p_i) \cap \displaystyle\sum_{j \neq i} \mathrm{Im}\,(p_j)$. Il existe $(x_j)_{j \neq i} \in E^{m-1}$ tel que $x = \displaystyle\sum_{j \neq i} p_j\,(x_j)$. D'autre part, $x \in \mathrm{Im}\,(p_i)$ et donc $x = p_i(x)$. On en déduit, d'après la question Q9, que

$$x = p_i(x) = \sum_{j \neq i} p_i\,(p_j\,(x_j)) = 0.$$

On a montré que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\mathrm{Im}\,(p_i) \cap \displaystyle\sum_{j \neq i} \mathrm{Im}\,(p_j) = \{0\}$ et finalement que

$$E = \mathrm{Im}\,(p_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}\,(p_m)\,.$$

Q12. On sait que π_u est de la forme $\pi_u = (X - \lambda_1)^{k_1} \ldots (X - \lambda_m)^{k_m}$ avec $1 \leqslant k_1 \leqslant \alpha_1,\ \ldots,\ 1 \leqslant k_m \leqslant \alpha_m$.

Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, puisque deux polynômes en u commutent, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}\,(p_i(x)) &= (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{k_i} \circ Q_i(u) \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i - k_i} \circ R_i(u)(x) \\ &= \pi_u(u) \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i - k_i} \circ R_i(u)(x) = 0\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Im}\,(p_i) \subset N_i$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $i_0 \in [\![1, m]\!]$ tel que $\mathrm{Im}\,(p_{i_0}) \underset{\neq}{\subset} N_{i_0}$ et donc tel que $\dim\,(\mathrm{Im}\,(p_{i_0})) < \dim\,(N_{i_0})$. On a alors

$$\dim(E) = \sum_{i=1}^{m} (N_i) > \sum_{i=1}^{m} \dim\,(\mathrm{Im}\,(p_i))$$

ce qui contredit l'égalité $E = \mathrm{Im}\,(p_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}\,(p_m)$. On a montré que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\mathrm{Im}\,(p_i) = N_i$.

Partie II

Q13. Puisque u est diagonalisable, on sait que $\pi_u = \displaystyle\prod_{k=1}^{m} (X - \lambda_k)$.

Q14. Les pôles de $\dfrac{1}{\pi_u}$ sont simples. La décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{1}{\pi_u}$ est de la forme

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{X - \lambda_k}.$$

où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$. De plus, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $\alpha_k = \displaystyle\lim_{x \to \lambda_k} \frac{x - \lambda_k}{\pi_u(x)} = \lim_{x \to \lambda_k} \frac{1}{Q_k(x)} = \frac{1}{Q_k\,(\lambda_k)} = \theta_k$. Donc,

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{Q_k\,(\lambda_k)\,(X - \lambda_k)}.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par π_u, on obtient

$$1 = \sum_{k=1}^{m} \frac{\pi_u}{Q_k\,(\lambda_k)\,(X - \lambda_k)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{Q_k}{Q_k\,(\lambda_k)}.$$

Ainsi, si on pose $R_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, alors $R_1Q_1 + \ldots + R_mQ_m = 1$. Les polynômes (constants) $R_1, \ldots, R_m$, conviennent. Les projecteurs associés sont les $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u) = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)} Q_i(u)$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Q15. Si $m \geqslant 2$. Alors, $m - 1 \geqslant 1$ puis $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i}{Q_i(\lambda_i)}$ et X sont deux polynômes de degré inférieur ou égal à $m-1$ (car pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\deg(Q_i) = m - 1$).

Soit $j \in [\![1, m]\!]$. Puisque pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $Q_i = \displaystyle\prod_{k \neq i} (X - \lambda_k)$,

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i}{Q_i(\lambda_i)}\right)(\lambda_j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(\lambda_j)}{Q_i(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(\lambda_i)\,\delta_{i,j}}{Q_i(\lambda_i)} = \lambda_j.$$

Ainsi, les deux polynômes $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i}{Q_i(\lambda_i)}$ et X, de degrés inférieurs ou égaux à $m-1$, prennent la même valeur en chacun des m réels deux à deux distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. On en déduit que ces deux polynômes sont égaux et donc

$$X = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i}{Q_i(\lambda_i)} \quad (*).$$

Si $m = 1$, le résultat est faux car $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i}{Q_i(\lambda_i)} = \frac{\lambda_1 Q_1}{Q_1(\lambda_1)} = \frac{\lambda_1 \times 1}{1} = \lambda_1 \neq X$.

Soit $m \geqslant 2$. En évaluant en u les deux membres de $(*)$, on obtient

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{1}{Q_i(\lambda_i)} Q_i(u) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i.$$

Cette dernière égalité reste vraie quand $m = 1$ car si u est diagonalisable et admet λ_1 pour unique valeur propre, alors u et $\lambda_1 \mathrm{Id}_E$ coïncident sur une base de E puis $u = \lambda_1 \mathrm{Id}_E = \lambda_1 p_1$.

Q16.

a) A est symétrique réelle et donc A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_4.$$

b) Par suite, le polynôme $X^2 - 4$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Le polynôme minimal π_A, de la matrice A, est un diviseur unitaire de ce polynôme, de degré supérieur ou égal à 1. Donc, π_A est soit $X - 2$, soit $X + 2$, soit $X^2 - 4$. Maintenant, $A \neq 2I_4$ et $A \neq -2I_4$ et donc $\pi_A \neq X - 2$ et $\pi_A \neq X + 2$. Il ne reste que

$$\pi_A = X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2).$$

On prend alors $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ puis $P_1 = Q_2 = X + 2$ et $P_2 = Q_1 = X - 2$. Ensuite,

$$\Pi_1 = \frac{1}{Q_1(\lambda_1)} Q_1(A) = -\frac{1}{4}(A - 2I_4) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\Pi_2 = \frac{1}{Q_2(\lambda_2)} Q_2(A) = \frac{1}{4}(A + 2I_4) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Soit $q \geqslant 1$. On sait que $\Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1 = 0$ et que $A = -2\Pi_1 + 2\Pi_2$. Puisque les matrices Π_1 et Π_2 commutent, la formule du binôme de Newton fournit (en tenant compte du fait que Π_1 et Π_2 sont idempotents),

$$A^q = (-2\Pi_1 + 2\Pi_2)^q = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-2)^k 2^{q-k} \Pi_1^k \Pi_2^{q-k} = (-2)^q \Pi_1^q + 2^q \Pi_2^q = (-2)^q \Pi_1 + 2^q \Pi_2.$$

Cette dernière égalité reste vraie quand $q = 0$ car $(-2)^0 \Pi_1 + 2^0 \Pi_2 = \Pi_1 + \Pi_2 = I_4 = A^0$. Donc,

$$\forall q \in \mathbb{N},\ A^q = (-2)^q \Pi_1 + 2^q \Pi_2.$$

Q17. Posons $p = \deg(\pi_v) \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. La division euclidienne de P par π_v s'écrit $P = Q\pi_v + R$ où $(Q, R) \in (\mathbb{C}[X])^2$ et $\deg(R) < p$. En évaluant en v, on obtient

$$P(v) = Q(v) \circ \pi_v(v) + R(v) = R(v) \in \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, v, \ldots, v^{p-1}\right).$$

Ainsi, $\mathbb{C}[v] \subset \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, v, \ldots, v^{p-1}\right)$ puis $\mathbb{C}[v] = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, v, \ldots, v^{p-1}\right)$ puis $\dim(\mathbb{C}[v]) \leqslant p$. Montrons alors que la famille $\left(\mathrm{Id}_E, v, \ldots, v^{p-1}\right)$ est une famille libre de $\mathbb{C}[v]$. Soient $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ puis $P = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k$.

$$\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k v^k = 0 \Rightarrow P(v) = 0 \Rightarrow P = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0$$

car $\deg(P) < p = \deg(\pi_v)$ et par définition de π_v.

Ainsi, la famille $\left(\mathrm{Id}_E, v, \ldots, v^{p-1}\right)$ est une famille libre de $\mathbb{C}[v]$ et finalement une base de $\mathbb{C}[v]$. On en déduit que $\dim(\mathbb{C}[v]) = p = \deg(\pi_v)$.

Q18. Les p_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, sont des polynômes en u ou encore les p_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, sont des éléments de $\mathbb{C}[u]$. Ensuite, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, Q_i est un polynôme non nul de degré strictement inférieur au degré de π_u. On en déduit que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $p_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)} Q_i(u) \neq 0$.

Vérifions que la famille $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$ tel que $\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_m p_m = 0$ $(*)$.
Soit $i \in [\![1, m]\!]$. On compose les deux membres de $(*)$ à gauche par p_i. Puisque pour $j \neq i$, $p_i \circ p_j = 0$ et que $p_i^2 = p_i$, on obtient $\alpha_i p_i = 0$ puis $\alpha_i = 0$ car $p_i \neq 0$.

Ainsi, la famille $(p_1, \ldots, p_m)$ est une famille libre de $\mathbb{C}[u]$. De plus, $\mathrm{card}(p_1, \ldots, p_m) = m = \dim(\mathbb{C}[u])$ (d'après la question précédente) et donc

$$\text{la famille } (p_1, \ldots, p_m) \text{ est une base de } \mathbb{C}[u].$$

Q19. Soit $n \geqslant 2$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice élémentaire $E_{1,2}$. u est nilpotent d'indice 2 puis $\pi_u = X^2$. Dans ce cas, $\deg(\pi_u) = 2$ puis $\dim(\mathbb{C}[u]) = 2$ d'après la question Q17.

D'autre part, $m = 1$ (u a une valeur propre et une seule, à savoir 0) et donc $\mathrm{card}(p_1, \ldots, p_m) = 1 < 2 = \dim(\mathbb{C}[u])$. Dans ce cas, $(p_1, \ldots, p_m)$ n'est pas une base de $\mathbb{C}[u]$.

Q20. Soit $P = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_m)$. Posons $P = X^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$. Alors

$$\begin{aligned}
P(u) &= u^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k u^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^m f_i + \sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k f_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\lambda_i^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k \lambda_i^k \right) f_i = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) f_i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a trouvé un polynôme P, à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de u. On sait alors que u est diagonalisable.

Problème 2 : Mines (2023)

A. Etude d'une norme sur $\mathscr{L}(E)$

1) On pose $A = \left\{\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E \setminus \{0\}\right\}$ et $B = \{\|u(x)\|,\ x \in E,\ \|x\| = 1\}$.

L'application u est continue sur l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ car u est linéaire sur l'espace de dimension finie E. Donc, il existe un réel positif M tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant M\|x\|$.
Puisque $E \neq \{0\}$, A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par M. On en déduit que A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Ensuite, $B \subset A$ car si x est un élément de E de norme 1, alors $x \neq 0$ et $\|u(x)\| = \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. D'autre part, pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \left\|u\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\| \in B$$

car $\left\|\dfrac{1}{\|x\|}x\right\| = \dfrac{\|x\|}{\|x\|} = 1$. Ceci montre que $A \subset B$ puis que $A = B$. En particulier, $\text{Sup}(A) = \text{Sup}(B)$.

2) • D'après la question précédente, $|||\ |||$ est une application de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$. $|||u||| \geqslant \dfrac{\|u(x_0)\|}{\|x_0\|} \geqslant 0$.
On a montré que : $\forall u \in \mathscr{L}(E)$, $|||u||| \geqslant 0$ (positivité).

• Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

$$\begin{aligned}|||u||| = 0 &\Rightarrow \forall x \in E \setminus \{0\},\ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leqslant 0 \Rightarrow \forall x \in E \setminus \{0\},\ \|u(x)\| = 0 \Rightarrow \forall x \in E \setminus \{0\},\ u(x) = 0\\ &\Rightarrow \forall x \in E,\ u(x) = 0 \text{ (car } u \text{ linéaire)}\\ &\Rightarrow u = 0.\end{aligned}$$

On a montré que : $\forall u \in \mathscr{L}(E)$, $(|||u||| = 0 \Rightarrow u = 0)$ (axiome de séparation).

• Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{\|(\lambda u)(x)\|}{\|x\|} = |\lambda|\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leqslant |\lambda|\ |||u|||$. Donc, $|\lambda|\ |||u|||$ est un majorant de $\left\{\dfrac{\|(\lambda u)(x)\|}{\|x\|},\ x \in E \setminus \{0\}\right\}$. Puisque $|||\lambda u|||$ est le plus petit de ces majorants, on a montré que $|||\lambda u||| \leqslant |\lambda|\ |||u|||$.

On suppose de plus $\lambda \neq 0$. On applique ce qui précède à $\lambda' = \dfrac{1}{\lambda}$ et $u' = \lambda u$. On obtient $|||u||| = |||\lambda' u'||| \leqslant |\lambda'|\ |||u'||| = \dfrac{1}{|\lambda|}|||\lambda u|||$ et donc $|\lambda|\ |||u||| \leqslant |||\lambda u|||$ puis $|||\lambda u||| = |\lambda|\ |||u|||$.

Cette dernière égalité reste vraie quand $\lambda = 0$ car dans ce cas les deux membres de l'égalité sont nuls. On a montré que

$$\forall\ u \in \mathscr{L}(E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ |||\lambda u||| = |\lambda\ |||u||| \text{ (homogénéité)}.$$

• Soit $(u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{\|(u+v)(x)\|}{\|x\|} \leqslant \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} + \dfrac{\|v(x)\|}{\|x\|} \leqslant |||u||| + |||v|||$. Donc, $|||u||| + |||v|||$ est un majorant de $\left\{\dfrac{\|(u+v)(x)\|}{\|x\|},\ x \neq 0\right\}$. Puisque $|||u+v|||$ est le plus petit de ces majorants, on a donc $|||u+v||| \leqslant |||u|||+|||v|||$.

On a montré que : $\forall (u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$, $|||u+v||| \leqslant |||u||| + |||v|||$ (inégalité triangulaire).

Finalement, $|||\ |||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$.

3) Par définition de $|||\ |||$, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant |||u|||\ \|x\|$.

Soit $(u,v) \in (\mathscr{L}(E))^2$. Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$,

$$\|uv(x)\| = \|u(v(x))\| \leqslant |||u|||\ \|v(x)\| \leqslant |||u|||\ |||v|||\ \|x\|$$

et donc (puisque $\|x\| > 0$) $\dfrac{\|uv(x)\|}{\|x\|} \leqslant |||u|||\ |||v|||$. Ainsi, $|||u|||\ |||v|||$ est un majorant de $\left\{\dfrac{\|uv(x)\|}{\|x\|},\ x \neq 0\right\}$. Puisque $|||uv|||$ est le plus petit de ces majorants, on a donc $|||uv||| \leqslant |||u|||\ |||v|||$. On a montré que $|||\ |||$ est une norme sous-multiplicative.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. $|||u^0||| = |||\mathrm{Id}||| = \mathrm{Sup}\left\{\dfrac{\|x\|}{\|x\|},\ x \neq 0\right\} = 1 \leqslant |||u|||^0$.
D'autre part, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $|||u^k||| \leqslant \underbrace{|||u||| \times \ldots \times |||u|||}_{\text{k facteurs}} = |||u|||^k$. Finalement,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |||u^k||| \leqslant |||u|||^k.$$

B. Etude de la stabilité en 0 du système linéaire

4) Posons $\chi_a = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$ où $r \in \mathbb{N}^*$, les λ_i sont des complexes deux à deux distincts et les m_i sont des entiers naturels non nuls de somme n.

Puisque les polynômes $(X - \lambda_i)^{m_i}$ sont deux à deux premiers entre eux car deux à deux sans racine commune dans $\mathbb{C}$, le théorème de décomposition des noyaux permet d'affirmer que $\mathrm{Ker}\,(\chi_A(a)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\left((a - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{m_i}\right)$. Mais $\chi_a(a) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton et donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,(a - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{m_i}.$$

5) Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Soit $u \in \mathscr{L}(E_i)$. $q_i u p_i$ est une application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans lui-même ou encore un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Pour $x \in \mathbb{C}^n$, $q_i u p_i(x) = q_i u(x_i) = u(x_i)$ car $u(x_i) \in E_i$. Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\|q_i u p_i(x)\| = \|u(x_i)\| \leqslant |||u|||_i \|x_i\| = \|q_i p_i(x)\|\ \ |||u|||_i \leqslant |||q_i p_i|||_c |||u|||_i \|x\|.$$

Ainsi, pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{\|q_i u p_i(x)\|}{\|x\|} \leqslant |||q_i p_i|||_c |||u|||_i$ et donc $|||q_i u p_i|||_c \leqslant C_i |||u|||_i$ où $C_i = |||q_i p_i|||_c$.

6) Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Deux polynômes en a commutent et en particulier a et $(a - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{m_i}$ commutent. On sait alors que a laisse stable $\mathrm{Ker}\,(a - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{m_i} = E_i$.

7) Soit $(i, j) \in [\![1, r]\!]^2$.

$p_i q_j \in \mathscr{L}(E_j, E_i)$. Si $j \neq i$, pour tout $x_j \in E_j$, $p_i(q_j(x_j)) = p_i(x_j) = 0$ (car les E_k sont supplémentaires). Donc, si $j \neq i$, $p_i q_j$ est l'application nulle de E_j dans E_i.
Si $i = j$, pour tout $x_j \in E_j$, $p_j(q_j(x_j)) = p_j(x_j) = x_j$ et donc $p_j q_j = \mathrm{Id}_{E_j}$.

Ensuite, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $q_i p_i$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ puis, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $q_i p_i(x) = q_i(x_i) = x_i$. Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\sum_{i=1}^{r} q_i p_i(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i = x$. Par suite, $\sum_{i=1}^{r} q_i p_i = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$.

8) Soit $i \in [\![1, r]\!]$. $q_i a_i p_i$ est bien défini et est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$q_i a_i p_i(x) = q_i p_i a q_i p_i(x) = q_i p_i\,(a\,(x_i)) = a\,(x_i)$$

car E_i est stable par a. Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i(x) = \sum_{i=1}^{r} a\,(x_i) = a\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) = a(x).$$

On a montré que $a = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i$.

9) Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k = \sum_{i=1}^{r} q_i a^k p_i$.

- $\sum_{i=1}^{r} q_i a_i^0 p_i = \sum_{i=1}^{r} q_i p_i = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n} = a^0$ d'après la question 7). L'égalité est vraie quand $k = 0$.

- Soit $k \geqslant 0$. Supposons que $a^k = \sum_{i=1}^{r} q_i a^k p_i$. Alors

$$\begin{aligned}
a^{k+1} = a^k a &= \left(\sum_{i=1}^{r} p_i a_i^k q_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r} q_j a_j p_j\right) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,r]\!]^2} q_i a_i^k p_i q_j a_j p_j = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^k a_i p_i \text{ (d'après la question 7))}\\
&= \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^{k+1} p_i.
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence. On en déduit que pour $t \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(ta)^k = \sum_{i=1}^{r} q_i \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(ta_i)^k\right) p_i.$$

Maintenant, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, l'application $\varphi_i : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E_i) & \to & \mathscr{L}(\mathbb{C}^n) \\ h & \mapsto & q_i h p_i \end{array}$ est continue sur $\mathscr{L}(E_i)$ car linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathscr{L}(E_i)$. On en déduit que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
e^{ta} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(ta)^k &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{r} \varphi_i \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(ta_i)^k\right)\\
&= \sum_{i=1}^{r} \varphi_i \left(\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(ta_i)^k\right) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i\left(e^{ta_i}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{r} q_i e^{ta_i} p_i.
\end{aligned}$$

10) Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $i \in [\![1,r]\!]$. Les endomorphismes $t(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i})$ et $t\lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}$ (de E_i) commutent. Donc

$$\begin{aligned}
e^{ta_i} &= e^{t\left(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}\right) + t\lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}} = e^{t\left(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}\right)} e^{t\lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}}\\
&= e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(t\left(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}\right)\right)^k\\
&= e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i - 1} \frac{t^k}{k!}\left(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}\right)^k \text{ (car } E_i = \mathrm{Ker}\left(\left(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}\right)^{m_i}\right).
\end{aligned}$$

Puisque $|||\ |||_i$ est une norme, sous-multiplicative, sur $\mathscr{L}(E_i)$,

$$|||e^{ta_i}|||_i \leqslant \left|e^{t\lambda_i}\right| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}|||_i^k.$$

11) On pose $C = \mathrm{Max}\{C_i,\ I \in [\![1,r]\!]\}$ et $M = \mathrm{Max}\left\{|||a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}|||_i^k,\ 1 \leqslant i \leqslant r,\ 0 \leqslant k \leqslant m_i - 1\right\}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
|||e^{ta}|||_c &\leqslant \sum_{i=1}^{r} |||q_i e^{ta_i} p_i|||_c \leqslant \sum_{i=1}^{r} C_i |||e^{ta_i}|||_i \text{ (d'après la question 5)} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r} C_i \left|e^{t\lambda_i}\right| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}|||_i^k \\
&\leqslant CM \sum_{i=1}^{r} e^{\mathrm{Re}(t\lambda_i)} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} \\
&\leqslant CM \sum_{k=0}^{n} \frac{|t|^k}{k!} \sum_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)}.
\end{aligned}$$

Le polynôme $P = CM \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ est un polynôme tel que pour tout réel t,

$$|||e^{ta}|||_c \leqslant P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_i)}.$$

12) Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\frac{\|e^{tu_A}(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|e^{tv_a}(x)\|}{\|x\|} \leqslant |||e^{tv_A}|||_c.$$

$|||e^{tv_A}|||_c$ est un majorant de $\left\{\dfrac{\|e^{tu_A}(x)\|}{\|x\|},\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}$. Puisque $|||e^{tu_A}|||_r$ est le plus petit de ces majorants, on a donc $|||e^{tu_A}|||_r \leqslant |||e^{tv_A}|||_c$. On a montré que

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall t \in \mathbb{R},\ |||e^{tu_A}|||_r \leqslant |||e^{tv_A}|||_c.$$

13) On note que $u = u_A$.

On sait que pour tout réel t, $g_{x_0}(t) = e^{tu}(x_0)$.

• Supposons que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0$. Soit λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ puis $Z \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. On note encore z le vecteur de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à Z et on pose $z = x_0 + ix_1$ où x_0 et x_1 sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

On sait que, pour tout réel t, $e^{tv_A}(z) = e^{\lambda t} z$. On en déduit que pour tout réel t,

$$\begin{aligned}
\left\|e^{\lambda t} z\right\| &= \left\|e^{tv_A}(z)\right\| = \left\|e^{tv_A}(x_0) + ie^{tv_A}(x_1)\right\| = \left\|e^{tu}(x_0) + ie^{tu}(x_1)\right\| = \|g_{x_0}(t) + ig_{x_1}(t)\| \\
&\leqslant \|g_{x_0}(t)\| + |i|\,\|g_{x_1}(t)\| = \|g_{x_0}(t)\| + \|g_{x_1}(t)\|.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout réel t, $\left\|e^{\lambda t} z\right\| = \left|e^{\lambda t}\right| \|z\| = e^{t\mathrm{Re}(\lambda)} \|z\|$. Puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} (\|g_{x_0}(t)\| + \|g_{x_1}(t)\|) = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{t\mathrm{Re}(\lambda)} \|z\| = 0$ puis que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{t\mathrm{Re}(\lambda)} = 0$ car $\|z\| \neq 0$ et enfin on en déduit que $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

Ainsi, si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0$, alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$.

• Supposons que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, les valeurs propres deux à deux distinctes de A dans $\mathbb{C}$. D'après la question 11, il existe un polynôme P tel que pour tout réel t, $|||e^{tv_A}|||_c \leqslant P(|t|) \displaystyle\sum_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pour tout réel t,

$$\begin{aligned}
\|g_{x_0}(t)\| = \left\|e^{tu}(x_0)\right\| &\leqslant |||e^{tu}|||_r \|x_0\| \\
&\leqslant |||e^{tv_A}|||_c \|x_0\| \text{ (d'après la question 12)} \\
&\leqslant \|x_0\| P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)}.
\end{aligned}$$

Puisque pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} \|x_0\| P(|t|) \sum\limits_{i=1}^{r} e^{t\text{Re}(\lambda_i)} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0$.

Ainsi, si $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0$.

14) On suppose que la numérotation des valeurs propres de A a été effectuée de sorte que $\text{Re}(\lambda_1) \leqslant \ldots \leqslant \text{Re}(\lambda_r) < 0$. On pose $\alpha = -\dfrac{1}{2}\text{Re}(\lambda_r)$ de sorte que $\alpha > 0$. Pour tout réel t,

$$e^{\alpha t}|||e^{tu}|||_r \leqslant e^{\alpha t}|||e^{t\nu_A}|||_c \leqslant P(|t|)e^{\alpha t} \sum_{i=1}^{r} e^{t\text{Re}(\lambda_i)} \leqslant rP(|t|)e^{t\alpha}e^{t\text{Re}(\lambda_r)} = rP(|t|)e^{\frac{t\text{Re}(\lambda_r)t}{2}}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{t \to +\infty} rP(|t|)e^{\frac{t\text{Re}(\lambda_r)t}{2}} = 0$. Puisque d'autre part, la fonction $t \mapsto rP(|t|)e^{\frac{t\text{Re}(\lambda_r)t}{2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$, cette fonction est en particulier bornée sur $[0, +\infty[$. Donc, il existe $C_2 > 0$ tel que, pour tout réel positif t, $rP(|t|)e^{\frac{t\text{Re}(\lambda_r)t}{2}} \leqslant C_2$ puis pour tout réel t, $e^{\alpha t}|||e^{tu}|||_r \leqslant C_2$ et finalement, pour tout réel t, $|||e^{tu}|||_r \leqslant C_2 e^{-\alpha t}$.

On a montré que si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative, il existe deux réels strictement positifs C_2 et α tels que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ |||e^{tu}|||_r \leqslant C_2 e^{-\alpha t}.$$

Soit alors $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pour tout réel positif t, $\|g_{x_0}(t)\| = \|e^{tu}(x_0)\| \leqslant |||e^{tu}|||_r \|x_0\| \leqslant C_2 \|x_0\| e^{-\alpha t}$.