Matrices de transvection. Automorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

$\mathbb{R}$ est le corps des réels, n un entier naturel donné, $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{M}_n$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et $\mathcal{GL}_n$ le groupe des matrices carrées d'ordre n inversibles. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n$.

Pour $i,j \in \{1,...,n\}$, on définit l'élément $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n$ comme étant la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la i-ième ligne et j-ième colonne valant 1.

On appelle matrice de transvection toute matrice de type $I_n + \lambda E_{ij}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i \neq j$.

Partie I

1°) **a.** Calculer les produits $E_{i,j}E_{h,k}$ pour $i,j,h,k \in \{1,...,n\}$.
b. Que peut-on dire de la famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$?
c. Soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}, i,j,h,k \in \{1,...,n\}$, avec $i \neq j, h \neq k, j \neq h$. Calculer $(I_n + \lambda E_{i,j})(I_n + \mu E_{h,k})$. En déduire l'inverse de $I_n + \lambda E_{i,j}$.

2°) Soit $A \in \mathcal{M}_n$.
a. Montrer que l'addition à une ligne de A d'un vecteur proportionnel à une autre ligne peut se faire en multipliant A à gauche par une matrice de transvection.
b. Etablir un résultat analogue sur les colonnes.

3°) Soit $A \in \mathcal{M}_n$ de coefficients $a_{i,j}$. On suppose que la première ligne de A ou sa première colonne possède un élément non nul.
Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice de coefficients $b_{i,j}$ telle que $b_{1,1} = 1$ et $b_{i,1} = b_{1,i} = 0$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$.
On pourra envisager les cas suivants: i) $a_{1,1} = 1$; ii) $\exists i > 1, a_{i,1} \neq 0$ ou $a_{1,i} \neq 0$; iii) $a_{1,1} \neq 1$ et $\forall i > 1, a_{1,i} = a_{i,1} = 0$.

4°) Soit $A \in \mathcal{M}_n$ et r son rang, supposé strictement positif.
Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice diagonale de coefficients $b_{i,j}$ telle que
i) $b_{i,i} = 1$ si $1 \leqslant i < r$; ii) $b_{i,i} = 0$ si $r < i \leqslant n$; iii) $b_{r,r} = d$ avec $d = 1$ si $r < n$ et $d = \det A$ si $r = n$.
Faire une démonstration par récurrence en commençant par le cas où $n = 2$.

5°) Montrer que le groupe des matrices carrées d'ordre n de déterminant égal à 1 est engendré par les matrices de transvection.

6°) On suppose dans cette question seulement que $n \geqslant 3$. Soit $f : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$, telle que
i) $\forall A,B \in \mathcal{M}_n, f(AB) = f(A)f(B)$;
ii) Pour toute matrice diagonale A, $f(A)$ est égal au produit des coefficients de la diagonale.
a. Montrer que tout matrice $I_n + aE_{\alpha,\beta}, \alpha \neq \beta$, peut s'écrire sous la forme:
$I_n + aE_{\alpha,\beta} = (I_n + \lambda E_{i,j})(I_n + \mu E_{h,k})(I_n + \lambda E_{i,j})^{-1}(I_n + \mu E_{h,k})^{-1}$, expression dans laquelle on précisera les valeurs de λ,μ,i,j,h,k, avec $i \neq j, h \neq k$.
b. Calculer $f(A)$ si A est une matrice de transvection.
c. Calculer $f(A)$ si A est un élément quelconque de $\mathcal{M}_n$.

Partie II

Si $M \in \mathcal{M}_n$, on note $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice M.

1°) Vérifier que $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$, telle que $\forall A,B \in \mathcal{M}_n, \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

2°) Soit σ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$, telle que $\forall A,B \in \mathcal{M}_n, \sigma(AB) = \sigma(BA)$.
a. Soient $i,j \in \{1,...,n\}$, $i \neq j$, calculer $\sigma(E_{i,j})$.
b. Comparer $\sigma(E_{i,i})$ et $\sigma(E_{j,j})$ pour $i,j \in \{1,...,n\}$.
c. Montrer: $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathcal{M}_n, \sigma(M) = \lambda \,\mathrm{Tr}(M)$.

3°) Soit $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de M engendré par les matrices de la forme $AB - BA$, $A,B \in \mathcal{M}_n$, et soit $\mathcal{H} = \mathbb{R}I_n$. Montrer que $\dim \mathcal{T} = n^2 - 1$. En déduire que $\mathcal{M}_n = \mathcal{T} \oplus \mathcal{H}$.

4°) Pour $i,j \in \{1,...,n\}$, on pose $F_{i,j} = I_n + E_{i,j}$. Calculer pour $i,j,h,k \in \{1,...,n\}$, $h \neq k$, le produit matriciel $F_{h,k}^{-1} F_{i,j} F_{h,k}$.

5°) Soit θ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n, \forall B \in \mathcal{GL}_n, \theta(AB) = \theta(BA)$. Montrer: $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathcal{M}_n, \theta(M) = \lambda \,\mathrm{Tr}(M)$.

Partie III

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vecoriel de dimension $n \geqslant 2$, et soit E^* son dual. On note $(e_1,...,e_n)$ une base de E, et $(e_1^*,...,e_n^*)$ sa duale.
On note $\mathrm{Ł}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E, $\mathcal{GL}(E)$ le groupe de ses automorphismes, Id l'endomorphisme identité.
On appelle automorphisme d'algèbre de $\mathrm{Ł}(E)$ toute application A, linéaire et bijective de E dans E, qui de plus vérifie: $\forall u,v \in \mathrm{Ł}(E), A(u \circ v) = A(u) \circ A(v)$.
On note $\mathcal{A}ut(E)$ le groupe (pour la composition des applications) des automorphismes de E.
Soit $g \in \mathcal{GL}(E)$, on définit $A_g : \mathrm{Ł}(E) \to \mathrm{Ł}(E), u \mapsto A_g(u) = g \circ u \circ g^{-1}$. On dit que A_g est l'automorphisme intérieur défini par g.

1°) Montrer que l'application $\chi : g \mapsto A_g$ est un morphisme de groupes de $\mathcal{GL}(E)$ vers $\mathcal{A}ut(E)$. Cette application χ est-elle injective?

2°) **a.** Soit $g \in \mathrm{Ł}(E)$ tel que $\forall x \in E, (x,g(x))$ est une famille liée. Montrer que g est une homothétie.
b. En déduire le noyau de χ.

3°) Pour $(\varphi,x) \in E^* \times E$, on définit une application $u_{\varphi,x} : E \to E, y \mapsto \varphi(y)x$.
a. Montrer que $u_{\varphi,x}$ est un endomorphisme de E, préciser son image et son noyau.
b. à quelle condition nécessaire et suffisante sur (φ,x) $u_{\varphi,x}$ est-il un projecteur non nul?

4°) Dans la suite, pour $i,j \in \{1,...,n\}$, on notera $u_{i,j}$ l'application $u_{e_j^*,e_i}$.
a. Pour $i,j,h,k \in \{1,...,n\}$, calculer $u_{i,j} \circ u_{h,k}$.
b. Que peut-on dire de la famille $(u_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$?

5°) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs non nuls de E.
a. Démontrer que la relation $\leqslant$ définie sur $\mathcal{P}$ par:
$\forall p,q \in \mathcal{P}, (p \leqslant q) \iff (p = p \circ q = q \circ p)$
est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$. Est-ce une relation d'ordre totale?
b. On appelle élément minimal de $\mathcal{P}$ pour $\leqslant$ tout élément $p \in \mathcal{P}$ tel que: $\forall q \in \mathcal{P}, q \leqslant p \Rightarrow q = p$.
Etablir l'équivalence des énoncés suivants:
i) p est un projecteur de rang 1.
ii) p est un projecteur minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\leqslant$.
iii) $\exists (\varphi,x) \in E^* \times E$ tel que $p = u_{\varphi,x}$ et $\varphi(x) = 1$.

6°) Soit A un automorphisme de l'algèbre $\mathrm{Ł}(E)$.
a. Que peut-on dire de $A(p)$ si $p \in \mathcal{P}$?

b. Que peut-on dire de $A(p)$ si $p \in \mathcal{P}$ est un élément minimal pour $\leqslant$?
c. En déduire l'existence d'une famille $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ de vecteurs de E, et une famille $(\varphi_1,...,\varphi_n)$ de formes linéaires sur E, telles que:
i) $\forall i \in \{1,...,n\}, \varphi_i(\varepsilon_i) = 1$; ii) $\forall i \in \{1,...,n\}, A(u_{i,i}) = u_{\varphi_i,\varepsilon_i}$.
d. Calculer $\varphi_i(\varepsilon_j)$ pour $i,j \in \{1,...,n\}$.
Que peut-on en déduire pour les familles $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ et $(\varphi_1,...,\varphi_n)$?

7°) Soient $i,j \in \{1,...,n\}$.
a. Pour $k \in \{1,...,n\}, k \neq j$, calculer $A(u_{i,j}) \circ u_{\varphi_k,\varepsilon_k}$.
En déduire le rang et le noyau de $A(u_{i,j})$.
b. Calculer $A(u_{i,j}) \circ A(u_{j,i})$. En déduire l'image de $A(u_{i,j})$.
c. Montrer qu'il existe un réel non nul $\lambda_{i,j}$ tel que $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j} u_{\varphi_j,\varepsilon_i}$.

8°) **a.** Montrer que pour $i,j,k \in \{1,...,n\}$, $\lambda_{i,j}\lambda_{j,k} = \lambda_{i,k}$.
b. En déduire: $\forall i,j \in \{1,...,n\}$, $\lambda_{i,j} = \dfrac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}}$.

9°) **a.** Montrer qu'il existe une base $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ de E, dont la base duale est notée $(\alpha_1^*,..,\alpha_n^*)$, telle que $\forall i,j \in \{1,...,n\}$, $A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*,\alpha_i}$.
b. Montrer qu'il existe un élément $g \in \mathcal{GL}(E)$ tel que $\forall i,j \in \{1,...,n\}, A(u_{i,j}) = g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}$.
c. Conclure.

10°) Quelles sont toutes les formes linéaires φ sur Ł(E) telles que, pour tout $A \in \mathcal{A}ut(E)$, on ait: $\forall u \in$ Ł$(E), \varphi(A(u)) = \varphi(u)$?

PARTIE I (Rem : partie entièrement recopiée sur EITPE, 1987)

① ⓐ $E_{ij}\cdot E_{hk} = \delta_{jh} E_{ik}$: fait en classe.

ⓑ $(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ est une base de $\mathcal{M}_n$ (= base canonique). Si $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n$, A s'écrit dans cette base : $A=\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} a_{ij}E_{ij}$

ⓒ Si $i\neq j$, $\det(I_n+\lambda E_{ij})=1$ (car $I_n+\lambda E_{ij}$ est triangulaire avec des "1" sur la diagonale)

ⓓ Avec $i\neq j$, $h\neq k$, $j\neq h$, on a : $(I_n+\lambda E_{ij})(I_n+\mu E_{hk}) = I_n+\lambda E_{ij}+\mu E_{hk}+\lambda\mu \underbrace{\delta_{jh}}_{=0} E_{ik}$

$= I_n+\lambda E_{ij}+\mu E_{hk}$

On en déduit : $(I_n+\lambda E_{ij})(I_n-\lambda E_{ij}) = I_n$

donc $I_n+\lambda E_{ij}$ est inversible d'inverse $I_n-\lambda E_{ij}$.

---

② ⓐ Soit $i\neq j$ et $A=\sum\limits_{h,k} a_{hk}E_{hk}$. Alors $(I_n+\lambda E_{ij})A = A+\lambda E_{ij}A$

avec $\lambda E_{ij}A = \lambda\sum\limits_{h,k} a_{hk}E_{ij}E_{hk} = \lambda\sum\limits_{h,k} a_{hk}\delta_{jh}E_{ik} = \lambda\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}E_{ik}$

Or $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}E_{ik}$ est la matrice dont tous les termes sont nuls, sauf ceux de la i-ème ligne, qui sont ceux de la j-ième ligne de A.

Ainsi, $(I_n+\lambda E_{ij})A$ est la matrice obtenue à partir de A par l'op : $L_i\leftarrow L_i+\lambda L_j$

ⓑ On trouve de même que la matrice $A(I_n+\lambda E_{ij})$ est celle obtenue à partir de A par l'opération $C_j\leftarrow C_j+\lambda C_i$

(on peut faire un calcul semblable, ou utiliser : ${}^t(A.(I_n+\lambda E_{ij})) = {}^t(I_n+\lambda E_{ij})\,{}^tA$

$=(I_n+\lambda E_{ji})\,{}^tA$

et se ramener ainsi au cas précédent)

---

③ 1^{er} cas : $a_{11}=1$: les opérations $L_i\leftarrow L_i-a_{i1}L_1$ $(2\leq i\leq n)$ et $C_j\leftarrow C_j-a_{1j}C_1$ $(2\leq j\leq n)$

transforment A en une matrice B de la forme $B=\begin{pmatrix}1 & 0\cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & B'\\ 0 & \end{pmatrix}$.

D'après ce qui précède, $B=PAQ$ où $P=\prod\limits_{i=2}^{n}(I_n+a_{i1}E_{i1})$ et $Q=\prod\limits_{j=2}^{n}(I_n+a_{1j}E_{1j})$

ce qui donne le résultat.

2^{e} cas : Il existe $i>1$ tel que $a_{i1}\neq 0$

Alors, l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1-a_{11}}{a_{i1}} L_i$ transforme A en une matrice A' du type précédent. Ainsi, $B = PAQ$, où $P = \prod_{i=2}^{n} (I_n + a_{i1} E_{i1}) \left(I_n + \frac{1-a_{11}}{a_{i1}} E_{i1}\right)$ et $Q = \prod_{j=2}^{n} (I_n + a'_{1j} E_{1j})$, sera du type voulu.

<u>3ème cas</u> : <u>Il existe $j \geq 2$ tel que $a_{1j} \neq 0$</u>

L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + \frac{1-a_{11}}{a_{1j}} C_j$ nous ramène là encore au 1er cas, et on conclut comme ci-dessus.

<u>4ème cas</u> : $a_{11} \neq 1$ et $\forall i \geq 2$ $a_{i1} = 0$ et $\forall j \geq 2$ $a_{1j} = 0$

L'opération (par exemple) $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ (mult. à gauche par $I_n + E_{21}$) nous ramène au 2ème cas, <u>ce qui achève la démonstration</u>.

---

(4) • Supposer $r \neq 0$ revient simplement à supposer : $\underline{A \neq 0}$

• Remarquons également que la multiplication à droite ou à gauche d'une matrice A par une matrice de transvection, donne une matrice A' telle que $\det A' = \det A$ (car le dét. d'une matrice de transvection vaut 1)

• <u>Cas $n=2$</u>

– si la 1ère ligne ou la 1ère colonne de A n'est pas nulle, la question précédente donne : $\exists P, Q$, produits de matrices de transvection d'ordre 2, tq $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = B$ et $\det B = \det A = b$. Cela donne le résultat (le cas $r=1$ correspondant au cas $b=0$)

– sinon, l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ nous ramène au cas précédent (car $A \neq 0$)

• <u>Supposons le résultat démontré à l'ordre $n-1 \geq 2$</u>, et soit $A \in \mathcal{M}_n$, $\operatorname{rg} A = r \geq 1$.

* Si la 1ère ligne ou la 1ère colonne de A n'est pas nulle, il existe P, Q, produit de matrices de transvection d'ordre n, tq $PAQ = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

avec $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A = r$ et $\det B = \det B' = \det A$.

On a : $B' \in \mathcal{M}_{n-1}$ et $\operatorname{rg} B' = r-1$.

– si $\operatorname{rg} B' = 0$, i.e. si $r=1$, on a directement le résultat voulu.

– sinon, l'H.R permet d'affirmer qu'il existe P_1, Q_1, produit de matrices de transvection d'ordre $n-1$, telles que $P_1 B' Q_1 = B_1$ avec :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \text{ si } \operatorname{rg} B_1 < n-1 \quad \text{et} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 1 & \\ & & \det B_1 \end{pmatrix} \text{ si } \operatorname{rg} B_1 = n-1$$
(et $\det B_1 = \det B' = \det A$)

En notant $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, on vérifie alors facilement, en effectuant le produit par blocs : $P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 B' Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

soit : $P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1_{\det A} \end{pmatrix}$ si rg $B_1 = n-1$ soit rg $A = n$ et $P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \ddots 0 \end{pmatrix} \}r$ sinon.

On obtient alors le résultat à l'ordre n, en remarquant que si P_1 et Q_1 sont des produits de matrices de transvection d'ordre $n-1$, P' et Q' sont encore des produits de matrices de transvection d'ordre n

(car, si T est une matrice de transvection d'ordre $n-1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{pmatrix}$ est une matrice de transvection d'ordre n).

* Le cas où la 1ère ligne et la 1ère colonne de A sont nulles se ramène au cas précédent, à l'aide de l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_i$ où L_i est une ligne non nulle de A (il en existe car $A \neq 0$). CQFD.

---

(5) D'après ce qui précède, si A est une matrice donnée de déterminant $+1$ (leur ens. forme bien un sous-gpe de $GL_n(\mathbb{R})$, noté $SL_n(\mathbb{R})$), il existe P, Q, produit de matrices de transvection telles que $I_n = PAQ$ soit $A = P^{-1}Q^{-1}$.

P^{-1}, Q^{-1} étant elles aussi des produits de matrices de transvection, A est donc produit de matrices de transvection.

i.e. $SL_n(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices de transvection.

---

(6) (a) Calculons $A = (I_n + \lambda E_{ij})(I_n + \mu E_{hk})(I_n + \lambda E_{ij})^{-1}(I_n + \mu E_{h,k})^{-1}$ en supp. $i \neq j$ et $h \neq k$

$$A = (I + \lambda E_{ij})(I + \mu E_{h,k})(I - \lambda E_{ij})(I - \mu E_{hk})$$

$$= (I + \lambda E_{ij} + \mu E_{hk} + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik})(I - \lambda E_{ij} - \mu E_{hk} + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik})$$

$$= I + \cancel{\lambda E_{ij}} + \cancel{\mu E_{hk}} + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik} - \cancel{\lambda E_{ij}} - \lambda^2 \underbrace{E_{ij}^2}_{=0} - \lambda\mu\delta_{ik}E_{hj} - \lambda^2\mu\delta_{jh}\delta_{ik}E_{ij}$$

$$- \cancel{\mu E_{hk}} - \cancel{\lambda\mu\delta_{jh}E_{ik}} - \mu^2\underbrace{E_{hk}^2}_{=0} - \lambda\mu^2\delta_{jh}\underbrace{\delta_{kh}}_{=0}E_{ik} + \cancel{\lambda\mu\delta_{jh}E_{ik}}$$

$$+ \lambda^2\mu\delta_{jh}\underbrace{\delta_{ji}}_{=0}E_{ik} + \lambda\mu^2\delta_{jh}\delta_{ik}E_{hk} + \lambda^2\mu^2\delta_{jh}\delta_{jh}\delta_{ik}E_{ik}$$

$$= I + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik} - \lambda\mu\delta_{ik}E_{hj} - \lambda^2\mu\delta_{jh}\delta_{ik}E_{ij} + \lambda\mu^2\delta_{jh}\delta_{ik}E_{hk} + \lambda^2\mu^2\delta_{jh}\delta_{ik}E_{ik}$$

En supposant $i \neq k$, on a : $A = I_n + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik}$

puis, pour $h = j$: $A = I_n + \lambda\mu E_{ik}$

[il est possible de trouver $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^2$ tq $i \neq j$, $i \neq k$ et $j \neq k$ car $n \geq 3$]

Il suffit donc ensuite de choisir $i = \alpha$, $k = \beta$ et $\lambda\mu = a$ pour obtenir $A = I_n + aE_{\alpha\beta}$

(b) Soit $A = I + aE_{\alpha\beta}$ avec $\alpha \neq \beta$ une matrice de transvection, et i, j, h, k, λ, μ comme ci-dessus. On a alors :

$$f(A) = f(I + \lambda E_{ij})\, f(I + \mu E_{hk})\, f\left((I + \lambda E_{ij})^{-1}\right) f\left((I + \mu E_{hk})^{-1}\right)$$

soit $f(A) = f(I+\lambda E_{ij})\, f((I+\lambda E_{ij})^{-1})\, f(I+\mu E_{hk})\, f((I+\mu E_{hk})^{-1})$

$= f[(I+\lambda E_{ij})(I+\lambda E_{ij})^{-1}]\, f[(I+\mu E_{hk})(I+\mu E_{hk})^{-1}] = f(I_n)\cdot f(I_n)$

Or $f(I_n) = 1$ d'où $\underline{f(A) = 1}$.

ⓒ Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Alors, il existe P, Q, produits de matrices de transvection, telles que $B = PAQ$ soit diagonale, de la forme décrite à la question 4.

On a alors $f(B) = \det A$ et $f(P) = f(Q) = 1$

(car, si $P = \prod T_i$, on a $f(P) = \prod f(T_i)$ ..) d'où : $\underline{f(A) = \det A}$.

(Une jolie caractérisation du déterminant, isn't ?)

PARTIE II

① cf. cours (à redémontrer lors du concours)

② ⓐ Soit $i \neq j$. $\sigma(E_{ij} E_{ii}) = \sigma(0) = 0$ car σ linéaire

d'où $0 = \sigma(E_{ii} E_{ij}) = \sigma(E_{ij})$: $\underline{\text{si } i \neq j,\ \sigma(E_{ij}) = 0}$

ⓑ $\sigma(E_{ij} E_{ji}) = \sigma(E_{ji} E_{ij})$ d'où $\underline{\sigma(E_{ii}) = \sigma(E_{jj})}$ pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

ⓒ Notons λ la valeur commune des $\sigma(E_{ii})$ pour $1 \leq i \leq n$. Soit $M \in \mathcal{M}_n$, $M = \sum_{i,j} m_{ij} E_{ij}$. σ étant linéaire : $\sigma(M) = \sum_{i,j} m_{ij}\sigma(E_{ij}) = \sum_i m_{ii}\sigma(E_{ii})$

soit $\underline{\sigma(M) = \lambda \operatorname{tr}(M)}$

---

③ • Si $A, B \in \mathcal{M}_n$, on a $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$ donc $\forall M \in \mathcal{T}, \operatorname{tr}(M) = 0$ (car M est <u>combinaison linéaire</u> de matrices de la forme $AB - BA$, et tr est une forme linéaire)

En notant $\mathcal{T}' = \{M \in \mathcal{M}_n,\ \operatorname{tr}(M) = 0\}$, on a donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. De plus, $\dim \mathcal{T}' = n^2 - 1$ puisque $\mathcal{T}'$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n$ (noyau d'une f. l. non nulle).

donc : $\dim \mathcal{T} \leq n^2 - 1$.

• D'autre part : si $i \neq j$: $E_{ij} = E_{ii} E_{ij} - E_{ij} E_{ii} \in \mathcal{T}$

si $i \in [\![2,n]\!]$ $E_{11} - E_{ii} = E_{1i} E_{i1} - E_{i1} E_{1i} \in \mathcal{T}$

donc $\mathcal{T}$ contient, en particulier, les $n^2 - 1$ matrices $(E_{ij})_{i \neq j}$ et $(E_{11} - E_{ii})_{i \geq 2}$.

Ces matrices étant lin^t indépendantes (facile), il en résulte : $\dim \mathcal{T} \geq n^2 - 1$.

Finalement : $\underline{\dim \mathcal{T} = n^2 - 1}$

(et on a aussi démontré : $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$)

• Puisque $I_n \notin \mathcal{T} = \mathcal{T}'$, la droite vectorielle engendrée par I_n est bien un supplémentaire de $\mathcal{T}$, soit $\mathcal{M}_n = \mathcal{T} \oplus \mathcal{H}$.

---

④ $F_{hk}^{-1} F_{ij} F_{hk} = I_n + E_{ij} - \delta_{ik} E_{hj} + \delta_{jh} E_{ik} - \delta_{ik}\delta_{jh} E_{hk}$ (calcul semblable à celui de I.6.a)

(5) On a alors :

$$\theta(F_{hk}^{-1}F_{ij}F_{hk}) = \theta(F_{ij}F_{hk}(F_{hk})^{-1}) = \theta(F_{ij}).\ \text{D'où :}$$

$$\theta(F_{ij}) = \theta(F_{ij}) - \delta_{ik}\theta(E_{hj}) + \delta_{jh}\theta(E_{ik}) - \delta_{ik}\delta_{jh}\theta(E_{hk})$$

soit $\delta_{jh}\theta(E_{ik}) - \delta_{ik}\theta(E_{hj}) - \delta_{ik}\delta_{jh}\theta(E_{hk}) = 0$

- pour $i=j=h$ et $i\neq k$, on obtient : $\theta(E_{ik}) = 0$
- pour $i=k, j=h$ et $i\neq j$, on obtient : $\theta(E_{ii}) - \theta(E_{jj}) = \theta(E_{hk}) = 0$

soit $\theta(E_{ii}) = \theta(E_{jj})$

Le résultat cherché en découle, exactement comme dans la question n°2.

PARTIE III

(1) * On vérifie d'abord facilement que : A_g est linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ et que $A_g(u\circ v) = A_g(u)\circ A_g(v)$ pour tout $(u,v)\in\mathcal{L}(E)^2$ et $A_g(Id)=Id$. D'autre part, si $g\in GL(E)$, on a :

$$\forall u\in\mathcal{L}(E),\quad A_g\circ A_{g^{-1}}(u) = g\circ(g^{-1}\circ u\circ g)\circ g^{-1} = u = Id_E(u)$$

d'où $A_g\circ A_{g^{-1}} = Id_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi, A_g est bijective ; c'est donc bien un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$

* Montrons que χ est un morphisme du groupe $(GL(E),\circ)$ dans le groupe $Aut(\mathcal{L}(E),\circ)$

i.e : $\forall g,g'\in GL(E)$, $A_g\circ A_{g'} = A_{g\circ g'}$. Or :

$$\forall u\in\mathcal{L}(E)\quad A_g\circ A_{g'}(u) = g\circ(g'\circ u\circ g'^{-1})\circ g'$$

et $A_{g\circ g'}(u) = g\circ g'\circ u\circ(g\circ g')^{-1} = g\circ g'\circ u\circ g'^{-1}\circ g'$, d'où l'égalité.

* χ n'est pas injective : voir question 2.b.

---

(2) (a) Exercice déjà fait en classe.

(b) Le noyau de χ est : $\operatorname{Ker}\chi = \chi^{-1}(Id_{\mathcal{L}(E)})$

$$\text{soit } \operatorname{Ker}\chi = \{g\in GL(E) \text{ tq } A_g = Id_{\mathcal{L}(E)}\}$$
$$= \{g\in GL(E) \text{ tq } \forall u\in\mathcal{L}(E),\ g\circ u\circ g^{-1} = u\}$$
$$= \{g\in GL(E) \text{ tq } \text{''}\quad g\circ u = u\circ g\}$$

Soit $g\in\operatorname{Ker}\chi$, $x\in E-\{0\}$, H un hyperplan supplémentaire de $\mathbb{R}x$ et u la symétrie p.r. à $\mathbb{R}x$, de direction H. On a $g\circ u = u\circ g$, d'où $g[u(x)] = u[g(x)]$ soit $g(x) = u[g(x)]$

$g(x)$ est donc invariant par u, i.e. $g(x)\in\mathbb{R}x$: $\{x, g(x)\}$ est lié (ce résultat demeurant d'ailleurs vrai si $x=0$). On en déduit que g est une homothétie.

Réciproquement, il est facile de vérifier que si g est une homothétie ($g=\lambda Id_E$), alors $\chi(g)=0$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}\,\chi = \{\lambda \mathrm{Id}_E, \lambda \neq 0\}$ ($\lambda \neq 0$ car sinon, $\lambda \mathrm{Id}_E \notin GL(E)$)

Puisque $\mathrm{Ker}\,\chi$ n'est pas réduit à $\{\mathrm{Id}_E\}$, χ n'est pas injective.

---

(3) (a) • $u_{\varphi,x} \in \mathcal{L}(E)$: facile.

• - si $x=0$: $u_{\varphi,0}$ est l'application nulle

- si $x \neq 0$: $\mathrm{Ker}\, u_{\varphi,x} = \{y \in E, \varphi(y)x = 0\} = \{y \in E, \varphi(y) = 0\} = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

• - si $\varphi = 0_{E^*}$: $\mathrm{Im}\, u_{0,x} = \{0\}$

- si $\varphi \neq 0_{E^*}$, φ est surjective de E sur $\mathbb{R}$ donc $\mathrm{Im}\, u_{\varphi,x} = \mathrm{Vect}(\{x\})$

(b) - le cas $x=0$ est exclu par l'énoncé ; on supposera donc $x \neq 0$

- $u_{\varphi,x}$ projection $\iff u_{\varphi,x} \circ u_{\varphi,x} = u_{\varphi,x}$

$\iff \forall y \in E \quad u_{\varphi,x}[\varphi(y)x] = \varphi(y)x$

$\iff$ " $\quad \varphi(y)\, u_{\varphi,x}(x) = \varphi(y)x$

$\iff$ " $\quad \varphi(y)\varphi(x)x = \varphi(y)x$

$\iff$ " $\quad \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(y)$ car $x \neq 0$.

Si φ est la forme linéaire nulle, $u_{\varphi,x} = 0$: ce cas est exclu.

Sinon, il existe $y \in E$ tq $\varphi(y) \neq 0$, et la condition précédente s'écrit : $\varphi(x) = 1$.

Ainsi : $u_{\varphi,x}$ projection non nul $\iff \varphi(x) = 1$ (car, si $\varphi(x)=1$, on ne peut pas avoir $x=0$ ou $\varphi=0$)

---

(4) • On remarque que : $\forall x \in E \quad u_{e_j^*, e_i}(x) = e_j^*(x)\, e_i$

donc $\forall k \in [\![1,n]\!] \quad u_{e_j^*, e_i}(e_k) = \delta_{jk}\, e_i$

Ainsi, la matrice de u_{ij} dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est E_{ij}

• Il en résulte immédiatement :

$$\begin{cases} - \ u_{ij} \circ u_{hk} = \delta_{jh}\, u_{ik} \\ - \ (u_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ base de } \mathcal{L}(E) \end{cases}$$

---

(5) (a) • $\leq$ est réflexive car : $\forall p \in \mathcal{P}$, $p = p^2$ d'où $p \leq p$

• $\leq$ est antisymétrique car : si $p, q \in \mathcal{P}$, $p \leq q$ et $q \leq p \Rightarrow \begin{cases} p = p\circ q = q \circ p \\ q = q \circ p = p \circ q \end{cases} \Rightarrow p = q$.

• $\leq$ est transitive car : si $p, q, r \in \mathcal{P}$ sont tels que $p \leq q$ et $q \leq r$, on a :

$p = p\circ q = q \circ p$ et $q = q \circ r = r \circ q$

d'où $p = p\circ q = p\circ(q \circ r) = (p\circ q)\circ r = p \circ r$

et $p = q\circ p = (r\circ q)\circ p = r\circ(q\circ p) = r\circ p$

d'où $p \leq r$

Ainsi : $\le$ est bien une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$.

- Soit F un sev de E de dimension ≥ 1 et G un sev de E de dimension ≥ 1 tels que $E = F \oplus G$ (c'est possible car $n \geq 2$). Soit p la projection sur F de direction G et q la projection sur G de direction F.

On a alors $p \circ q = q \circ p = 0$. On ne peut donc avoir ni $p \le q$, ni $q \le p$.

Ainsi, $\le$ est une relation d'ordre partiel.

(b) i) $\Rightarrow$ ii) Soit p un projecteur de rang 1, et $q \in \mathcal{P}$ tel que $q \le p$, i.e. $q = q \circ p = p \circ q$.

- si $x \in \operatorname{Ker} p$, $p(x) = 0$ d'où $q(x) = q[p(x)] = q(0) = 0$

- soit $\{a\}$ une base de $\operatorname{Im} p$ ($\operatorname{rg} p = 1$). $q(a) = p[q(a)]$, donc $q(a) \in \operatorname{Im} p$, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $q(a) = \lambda a$. On a alors : $\forall x \in \operatorname{Im} p$, $q(x) = \lambda x = \lambda p(x)$

- Ainsi, q et λp coïncident sur $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$, supplémentaires. On a donc $q = \lambda p$. Mais alors, l'égalité $q = p \circ q = q \circ p$ donne $\lambda p = \lambda^2 p$ soit $\lambda = 1$ (car les cas $\lambda = 0, p = 0$ sont exclus).

d'où finalement $q = p$: p est minimal.

ii) $\Rightarrow$ i) Soit p un élt minimal de $\mathcal{P}$, et $r = \operatorname{rg}(p)$ ($r \geq 1$ car $p \neq 0$).

Soit $(x_1, \dots x_n)$ une base de E telle que $(x_1, \dots x_r)$ soit une base de $\operatorname{Im} p$ et $(x_{r+1}, \dots x_n)$ une base de $\operatorname{Ker} p$ (c'est possible car $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$).

Soit alors q la projection sur $\mathbb{R}x_1$ de direction $\operatorname{Vect}(\{x_2, \dots x_n\})$.

Alors :
- $p \circ q(x_1) = p(x_1) = x_1$ et $q \circ p(x_1) = q(x_1) = x_1$
- $\forall i \in [\![2, r]\!]$ $p \circ q(x_i) = p(0) = 0$ et $q \circ p(x_i) = q(x_i) = 0$
- $\forall i \in [\![r+1, n]\!]$ $p \circ q(x_i) = p(0) = 0$ et $q \circ p(x_i) = q(0) = 0$.

Donc $q = q \circ p = p \circ q$, soit $q \le p$. p étant minimal, on a $q = p$, d'où $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q = \mathbb{R}x_1$

et p est de rang 1.

iii) $\Rightarrow$ i) découle directement de la question n°3

i) $\Rightarrow$ iii) Soit p un projecteur de rang 1, et $\{x\}$ une base de $\operatorname{Im} p$.

Alors, pour $\forall y \in E$, $\exists \lambda_y \in \mathbb{R}$ tq $p(y) = \lambda_y . x$

Il est facile de vérifier que l'application $y \mapsto \lambda_y$ est linéaire : notons alors $\lambda_y = \varphi(y)$, avec $\varphi \in E^*$.

On aura donc bien : $\forall y \in E$, $p(y) = u_{\varphi, x}(y)$, et $\varphi(x) = 1$ (car $p(x) = x$)

---

(6) (a) Si $p \in \mathcal{P}$, alors $A(p) \circ A(p) = A(p \circ p)$ et $A(p)$ est non nul car A est un automorphisme. Donc $A(p) \in \mathcal{P}$.

ⓑ - On remarque d'abord que, si $p, q \in \mathcal{P}$:

$$p \leq q \Rightarrow p = p \circ q = q \circ p \Rightarrow A(p) = A(p) \circ A(q) = A(q) \circ A(p)$$
$$\Rightarrow A(p) \leq A(q)$$

- Supposons p minimal, et soit $q \leq A(p)$. Alors $A^{-1}(q) \leq p$ (d'après ce qui précède, puisque A^{-1} est aussi un automorphisme d'algèbre), d'où $A^{-1}(q) = p$, soit $q = A(p)$.

Ainsi, $A(p)$ est minimal.

ⓒ Les applications u_{ii} sont des projecteurs de rang 1, donc des elts minimaux de $\mathcal{P}$. D'après ce qui précède, $A(u_{ii})$ est aussi un elt minimal de $\mathcal{P}$, donc, d'après 5., il existe $\varphi_i, \varepsilon_i \in E^* \times E$ tels que : $A(u_{ii}) = u_{\varphi_i, \varepsilon_i}$ et $\varphi_i(\varepsilon_i) = 1$ pour tt i.

ⓓ • Si $i \neq j$, on a $u_{ii} \circ u_{jj} = 0$ d'où $A(u_{ii} \circ u_{jj}) = A(u_{ii}) \circ A(u_{jj}) = 0$

Ainsi : $u_{\varphi_i, \varepsilon_i} \circ u_{\varphi_j, \varepsilon_j} = 0$ d'où $u_{\varphi_i, \varepsilon_i}\left[u_{\varphi_j, \varepsilon_j}(\varepsilon_j)\right] = 0$

$$u_{\varphi_i, \varepsilon_i}[\varepsilon_j] = 0$$

soit $\varphi_i(\varepsilon_j) . \varepsilon_i = 0$ d'où $\varphi_i(\varepsilon_j) = 0$.

Ainsi : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$.

• On en déduit que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est libre car :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0 \Rightarrow \forall i, \ \varphi_i\left(\sum_j \lambda_j e_j\right) = 0$$
$$\Rightarrow \forall i, \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j . \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \forall i, \ \lambda_i = 0$$

Donc $(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$ est une base de E, et $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ en est la base duale.

---

⑦ ⓐ • $A(u_{ij}) \circ u_{\varphi_k, \varepsilon_k} = A(u_{ij}) \circ A(u_{kk}) = A(u_{ij} \circ u_{kk}) = A(0) = 0$ (car $k \neq j$)

• On a donc $\forall k \neq j$ $A(u_{ij})\left[u_{\varphi_k, \varepsilon_k}(\varepsilon_k)\right] = 0$ soit $A(u_{ij})(\varepsilon_k) = 0$.

On en déduit : $\mathrm{Vect}(\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_{j+1}, \dots \varepsilon_n\}) \subset \mathrm{Ker}\, A(u_{ij})$, donc $\dim \mathrm{Ker}\, A(u_{ij}) \geq n-1$.

Mais $A(u_{ij})$ n'est pas nul (car A automorphisme), donc $\dim \mathrm{Ker}\, A(u_{ij}) \leq n-1$.

Finalement, $\dim \mathrm{Ker}\, A(u_{ij}) = n-1$, $\mathrm{rg}\, A(u_{ij}) = 1$

et $\mathrm{Ker}\, A(u_{ij}) = \mathrm{Vect}(\{\varepsilon_k, k \neq j\})$

ⓑ $A(u_{ij}) \circ A(u_{ji}) = A(u_{ii})$

Donc $A(u_{ij})\left[A(u_{ji})(\varepsilon_i)\right] = A(u_{ii})(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$.

Par suite, $\varepsilon_i \in \mathrm{Im}\, A(u_{ij})$ et, puisque $\mathrm{rg}\, A(u_{ij}) = 1$: $\mathrm{Im}\, A(u_{ij}) = \mathrm{Vect}(\{\varepsilon_i\})$

ⓒ On a : $A(u_{ij})(\varepsilon_j) \in \mathrm{Im}\, A(u_{ij})$. Donc $\exists \lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ tq $A(u_{ij})(\varepsilon_j) = \lambda_{ij} . \varepsilon_i$

soit $A(u_{ij})(\varepsilon_j) = \lambda_{ij}\, \varphi_j(\varepsilon_j)\, \varepsilon_i = \lambda_{ij} . u_{\varphi_j, \varepsilon_i}(\varepsilon_j)$

D'autre part, si $k \neq j$ $A(u_{ij})(\varepsilon_k) = 0$ et $\lambda_{ij} \cdot u_{\varphi_j, \varepsilon_i}(\varepsilon_k) = \lambda_{ij} \cdot \underbrace{\varphi_j(\varepsilon_k)}_{=0} \varepsilon_i = 0$

Donc $\underline{A(u_{ij}) = \lambda_{ij} u_{\varphi_j, \varepsilon_i}}$ (car ces deux endo. coïncident sur la base $\{\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n\}$)

et $\underline{\lambda_{ij} \neq 0}$ car $A(u_{ij}) \neq 0$ (A automorphisme)

---

(8) (a) $A(u_{ij}) \circ A(u_{jk}) = A(u_{ij} \circ u_{jk}) = A(u_{ik})$

soit $\lambda_{ij} \cdot \lambda_{jk} \, u_{\varphi_j, \varepsilon_i} \circ u_{\varphi_k, \varepsilon_j} = \lambda_{ik} \, u_{\varphi_k, \varepsilon_i}$

En appliquant cette égalité à ε_k, puisque $u_{\varphi_k, \varepsilon_i}(\varepsilon_k) = \varphi_k(\varepsilon_k) \cdot \varepsilon_i = \varepsilon_i$ etc...

on trouve : $\underline{\lambda_{ij} \cdot \lambda_{jk} = \lambda_{ik}}$

(b) D'où immédiatement : $\lambda_{ij} = \dfrac{\lambda_{i1}}{\lambda_{j1}}$ puisque $\lambda_{j1} \neq 0$.

---

(9) (a) On a : $\forall x \in E$, $A(u_{ij})(x) = \lambda_{ij} \, u_{\varphi_j, \varepsilon_i}(x) = \dfrac{\lambda_{i1}}{\lambda_{j1}} \varphi_j(x) \, \varepsilon_i$.

Notons alors $\alpha_i = \lambda_{i1} \varepsilon_i$. $\dfrac{1}{\lambda_{j1}} \varphi_j(\alpha_i) = \delta_{ij}$, donc $\alpha_j^* = \dfrac{1}{\lambda_{j1}} \varphi_j$

et on a alors : $\underline{A(u_{ij}) = u_{\alpha_j^*, \alpha_i}}$ ((α_i) est bien une base car $\lambda_{i1} \neq 0$)

(b) Notons g l'automorphisme de E tel que $g(e_i) = \alpha_i$ pour tout i

Alors : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $A(u_{ij})(\alpha_k) = \alpha_j^*(\alpha_k) \, \alpha_i = \delta_{jk} \alpha_i$

et $g \circ u_{ij} \circ g^{-1}(\alpha_k) = g \circ u_{ij}(e_k) = g\left[u_{e_j^*, e_i}(e_k)\right]$

$= g\left[e_j^*(e_k) e_i\right] = \delta_{jk} g(e_i) = \delta_{jk} \alpha_i$

Ainsi $\underline{A(u_{ij}) = g \circ u_{ij} \circ g^{-1}}$ (car coïncident sur la base $\{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$)

(c) Puisque $(u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$, on en déduit $A = A_g$

i.e. : $\exists g \in GL(E)$ tq $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $A(u) = g \circ u \circ g^{-1}$.

Autrement dit : <u>tous les automorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ sont des automorphismes intérieurs</u>

ou encore : l'application $\chi : g \mapsto A_g$ est surjective de $GL(E)$ sur $Aut(\mathcal{L}(E))$

---

(10) D'après la question précédente, il faut déterminer les $\varphi \in \mathcal{L}(E)^*$ telles que :

$\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\forall g \in GL(E)$, $\varphi(g \circ u \circ g^{-1}) = \varphi(u)$

Or, pour tt $v \in \mathcal{L}(E)$, pour tt $g \in GL(E)$, il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $ug^{-1} = v$, soit $u = vg$. Ce qui précède équivaut donc à :

$\forall v \in \mathcal{L}(E)$, $\forall g \in GL(E)$ $\varphi(g \circ v) = \varphi(v \circ g)$

D'après la question II.5 : $\underline{\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall u \in \mathcal{L}(E), \; \varphi(u) = \lambda \, tr(u)}$