RÉSEAU CPGE IBNGHAZI

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

DS N° 1 (4 heures)

Classe MP*1
Groupe 2

Algèbre Linéaire & Structure de groupes

PROBLÈME 1 :

NOTATIONS

$\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels (n entier $\geqslant 2$). 0_n désigne la matrice nulle de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

On identifiera une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. (on se permettra ainsi d'écrire $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$).

L'objet du problème est l'étude de certaines propriétés des groupes multiplicatifs de matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$: un tel groupe est un sous-ensemble G de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ qui a une structure de groupe pour la multiplication interne des matrices ; l'élément neutre de G sera noté E; le symétrique de $A \in G$ dans G sera noté A'. On a donc, pour tout $A \in G$: $AE = EA = A$ et $AA' = A'A = E$.

On notera (cf 1ère partie) qu'un tel groupe n'est pas nécessairement un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, et qu'une matrice A peut avoir un symétrique dans G sans être inversible dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$; de même, E n'est pas nécessairement la matrice identité.

PARTIE A

Soit P une matrice de projection (c'est-à-dire telle que $P^2 = P$).

1°) Montrer que l'ensemble $\{P\}$ forme un groupe multiplicatif de cardinal 1.

2°) Montrer que, si $P \neq 0_n$, l'ensemble $\{-P,P\}$ forme un groupe multiplicatif de cardinal 2.

PARTIE B

1°) Soient $A,B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, et $C = AB$. Montrer que $\mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(C)$, et que $\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}(A)$.

Soit G un groupe multiplicatif de matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, non réduit à $\{0_n\}$, et soit E son élément neutre.

2°) Montrer que, pour tout $A \in G$, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(E)$.

3°) Montrer que, pour tout $A \in G$, $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(E)$.

4°) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(E) \oplus \mathrm{Ker}(E)$, et que E est un projecteur.

PARTIE C

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels propres (i.e non triviaux) et supplémentaires de $\mathbb{R}^n$, de bases respectives $(u_1,u_2,\dots,u_k)$ et $(v_{k+1},\dots,v_n)$. Soit $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathcal{B} = (u_1,\dots,u_k,v_{k+1},\dots,v_n)$. Soit H l'ensemble des matrices A de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Ker}(A)$=V et $\mathrm{Im}(A)$=U.

1°) Quelle est la matrice E dans la base $\mathcal{B}$ de la projection sur U de direction V ?

2°) Montrer que, pour tout $A \in H$, la matrice de A dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme : $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, où A_1 est une matrice carrée d'ordre k inversible dans $\mathbb{M}_k(\mathbb{R})$.
Montrer que, réciproquement, si la matrice de A dans la base $\mathcal{B}$ est de cette forme, alors A appartient à H.

3°) Déduire des questions précédentes que H est un groupe multiplicatif de matrices, isomorphe à $GL_k(\mathbb{R})$.

4°) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

- **a)** A appartient à un groupe multiplicatif.
- **b)** A et A^2 ont même rang.
- **c)** A et A^2 ont la même image.
- **d)** A et A^2 ont même noyau.
- **e)** $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$.

PARTIE D

1°) En utilisant les résultats des parties B et C, montrer que, si une matrice non nulle A appartient à deux groupes multiplicatifs de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, G_1 et G_2, d'éléments neutres respectifs E_1 et E_2, et que si A'_1 et A'_2 sont les symétriques respectifs de A dans G_1 et G_2, alors : $E_1 = E_2$ et $A'_1 = A'_2$.

2°) Dans le cas $n = 3$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que A appartient à un groupe multiplicatif, et déterminer E et A'.

PROBLÈME 2 :

E désigne la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et on rappelle que (M_1,M_2,M_3,M_4) est une base de$E$.

PARTIE A

Dans cette partie, F est un sous-espace vectoriel de E, de dimension 3, et stable pour la multiplication. On veut montrer : $I \in F$, et pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $I \notin F$.

1°) Montrer que F et $\mathbb{R}I$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E (on rappelle que $\mathbb{R}I$ désigne la droite vectorielle engendrée par I, c'est-à-dire l'ensemble des matrices scalaires).

2°) On désigne alors par p la projection sur $\mathbb{R}I$ parallèlement à F.
a) Montrer que : $\forall (M,M') \in E^2$, $p(MM') = p(M)p(M')$.

b) En déduire que si M est un élément de E tel que $M^2 \in F$, alors M appartient à F.

3°) Montrer que M_2 et M_3 appartiennent à F, ainsi que M_1 et M_4.

4°) Conclure.

PARTIE B

Dans cette partie, on étudie certains endomorphismes de E.
On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

1°) A tout élément A de E, on associe l'application $\phi(A)$ de E dans E, définie par :

$$\forall M \in E \ ,\phi(A)(M) = AM - MA.$$

a) Vérifier rapidement que, pour tout $A \in E$, $\phi(A)$ appartient à $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que l'application ϕ ainsi définie de E dans $\mathcal{L}(E)$, qui à $A \in E$ associe $\phi(A)$, est linéaire. Déterminer $\phi(\lambda I)(\lambda \in \mathbb{R})$.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\phi(A) = 0$.
Montrer que $b = c = 0$ et que $a = d$ (on pourra utiliser les matrices M_i).

d) Déduire du b et du c que $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathbb{R}I$ et que $\mathrm{Im}(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, de dimension 3.

2°) On pose : $D = \{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \forall (M,N) \in E^2 \ , \ u(MN) = u(M)N + Mu(N)\}$.

a) Montrer que D est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(\phi)$ est incluse dans D.

3°) Soit u un élément de D.

a) Montrer que $u(I) = 0$.

b) Calculer le produit M_2M_2; en déduire qu'il existe deux réels x et y tels que $u(M_2) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$.
(on pourra poser $u(M_2) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.)

c) De même, montrer qu'il existe deux réels z et t tels que $u(M_3) = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ z & t \end{pmatrix}$.

d) Montrer que : $y + z = 0$.

e) Soit alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\begin{cases} a - d = y = -z \\ c = -x \\ b = -t \end{cases}$.
Les réels x,y,z,t ayant été définis aux b et c ci-dessus, montrer que $\phi(A) = u$.

4°) En conclure : $\mathrm{Im}(\phi) = D$.

PROBLÈME 1 :

Rem : Il était tout à fait regrettable que l'énoncé note de la même façon matrice et endomorphisme. Cela pouvait conduire à un certain nombre de confusions.

(A) 1°)
- $\times$ est interne dans $\{I\}$, car $I^2 = I$.
- $\times$ est associative dans $\{I\}$, car, plus g$^{\text{alt}}$, elle l'est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $(\{I\},\times)$ possède un e$^{\text{lt}}$ neutre : c'est I.
- I est son propre symétrique.

Ainsi $(\{I\},\times)$ est bien un groupe multiplicatif.

2°) même type de vérifications...

(B) 1)
- Soit $X \in \operatorname{Ker} B$ ($X \in \mathbb{R}^n$) : $BX=0 \Rightarrow ABX=0 \Rightarrow CX=0 \Rightarrow X \in \operatorname{Ker} C$

d'où $\operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker} C$.

- Soit $Y \in \operatorname{Im} C$. $\exists X \in \mathbb{R}^n$ tq $Y = CX = ABX = A(BX)$ d'où $Y \in \operatorname{Im} A$.

Donc $\operatorname{Im} C \subset \operatorname{Im} A$.

2) D'après la question précédente :

$A = AE \Rightarrow \operatorname{Ker} E \subset \operatorname{Ker} A$

$E = A'A \Rightarrow \operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} E$

d'où $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} E$

3) De même :

$A = EA \Rightarrow \operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} E$

$E = AA' \Rightarrow \operatorname{Im} E \subset \operatorname{Im} A$

d'où $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} E$

(C) 1) Par définition de la projection sur U de direction V :

$E(u_i) = u_i$ pour $i \in [\![1,k]\!]$ et $E(v_j) = 0$ pour $j \in [\![k+1,n]\!]$

donc $M_\mathcal{B}(E) = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2) a) Soit $A \in H$. Alors $A(U) \subset U$ et $A(V) = \{0\}$, donc $M_\mathcal{B}(A) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec $A_1 \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. De plus, A_1 est la matrice dans $\mathcal{B}_U$, de la restriction de A à $\operatorname{Im} A$, qui est ici un supplémentaire de $\operatorname{Ker} A$; d'après un th. célèbre du cours, cette restriction induit un isomorphisme de $\operatorname{Im} A$ sur $\operatorname{Im} A$, donc A_1 est inversible.

b) Réciproquement, soit A telle que $M_\mathcal{B}(A) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec $A_1 \in GL_k(\mathbb{R})$

On a clairement : $\operatorname{Im} A \subset U$ et $\operatorname{Ker} A \subset V$.

De plus, le rang de A est celui des colonnes de la matrice $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc aussi celui des colonnes de la matrice $\begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, qui sont linéairement indépendants car celles de A_1 le sont.

Donc $rg A = k = \dim U$, d'où $\mathrm{Im} A = U$, puis $\mathrm{Ker} A = V$ en utilisant le th. du rang.

Ainsi : $\underline{A \in H}$.

---

3) * D'après ce qui précède, si on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$, on a : $A \in H \Leftrightarrow \exists A_1 \in GL_k(\mathbb{R})$ tq $A = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$

On a alors :

- $\underline{\times \text{ interne}}$ dans H car : si $A = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$ et $B = P \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$ avec $A_1, B_1 \in GL_k(\mathbb{R})$ sont deux élts de H, alors $AB = P \begin{bmatrix} A_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$ avec A_1B_1 inversible donc $AB \in H$.
- $\underline{\times \text{ est associative}}$ dans $M_n(\mathbb{R})$, donc dans H.
- Soit $E = P \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$. On vérifie facilement que : $\forall A \in H : AE = EA = A$ donc E est $\underline{\text{élt neutre}}$ de H
- Soit $A \in H$, $A = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$ avec $A_1 \in GL_k(\mathbb{R})$. Soit alors $A' = P \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$.

On a donc $A' \in H$ et $AA' = A'A = E$, donc A' est le symétrique de A.

Finalt, $(H, \times)$ est un $\underline{\text{groupe multiplicatif de matrices}}$.

* Enfin, il est facile de vérifier que l'application qui à $A = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \in H$ associe A_1 est un $\underline{\text{isomorphisme du groupe } (H,\times) \text{ sur le groupe } (GL_k(\mathbb{R}), \times)}$.

---

4) $\underline{a) \Rightarrow b}$: Si $A \in G$ groupe multiplicatif, alors $A^2 \in G$ d'où $\mathrm{Im} A^2 = \mathrm{Im} A = \mathrm{Im} E$ (d'après B.). Donc $rg(A) = rg(A^2)$

$\underline{b) \Rightarrow c}$: si $rg(A) = rg(A^2)$, puisque $\mathrm{Im} A^2 \subset \mathrm{Im} A$, on a $\mathrm{Im} A^2 = \mathrm{Im} A$

$\underline{c) \Rightarrow d)}$: $\mathrm{Im} A = \mathrm{Im} A^2 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker} A = \dim \mathrm{Ker} A^2$ (d'après le th. du rang).

Puisque $\mathrm{Ker} A \subset \mathrm{Ker} A^2$, cela implique $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Ker} A^2$.

$\underline{d) \Rightarrow e)}$ Supposons $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Ker} A^2$. Soit alors $X \in \mathrm{Ker} A \cap \mathrm{Im} A$.

On a : $AX = 0$, et $\exists Y \in \mathbb{R}^n$ tq $X = AY$. D'où : $A^2Y = AX = 0$ d'où $Y \in \mathrm{Ker} A^2$ d'où $Y \in \mathrm{Ker} A$ et $X = AY = 0$.

Ainsi $\mathrm{Ker} A \cap \mathrm{Im} A = \{0\}$, d'où $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker} A \oplus \mathrm{Im} A$ à l'aide du th. du rang.

$\underline{e) \Rightarrow a)}$ Supposons $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker} A \oplus \mathrm{Im} A$. Soit alors H l'ensemble des matrices

$B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Ker}\, B = \mathrm{Ker}\, A$ et $\mathrm{Im}\, B = \mathrm{Im}\, A$. D'après C3, H est un groupe multiplicatif de matrices, et $A \in H$, d'où a).

D) 1) • Si $A \in G_1 \cap G_2$, alors $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, E_1 = \mathrm{Ker}\, E_2$ et $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, E_1 = \mathrm{Im}\, E_2$.

Or E_1 et E_2 sont des projections ; on en déduit $E_1 = E_2$ (exercice facile !)

• On a alors : $AA'_1 = E_1 = E_2 \Rightarrow A'_2 A A'_1 = A'_2 E_2 = A'_2$

$$\Rightarrow E_2 A'_1 = A'_2$$
$$\Rightarrow E_1 A'_1 = A'_2 \Rightarrow A'_1 = A'_2$$

---

2) • $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ On a : $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}(\{e_1, e_2\})$ où $e_1 = (1,2,1)$, $e_2 = (1,2,0)$

Puis : $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\, A \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ donc $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}(\{e_3\})$ où $e_3 = (0,-1,2)$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ étant une base de $\mathbb{R}^3$, on a : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\, A \oplus \mathrm{Ker}\, A$, donc A appartient bien à un groupe multiplicatif de matrices.

• Soit P la matrice de passage de la base canonique à $\{e_1, e_2, e_3\}$.

i.e. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a alors $E = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

et $M_{\mathcal{B}}(A) = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $M_{\mathcal{B}}(A') = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

puis $A' = P \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 21 & -10 & -5 \end{pmatrix}$

PROBLÈME 2 :

I) 1) F est un hyperplan de E, et $I \notin F$, donc $E = \mathbb{R}I \oplus F$ (cf. cours).

2) a) Soient $M, M' \in E$. Puisque $E = F \oplus \mathbb{R}I$, il existe $N, N' \in F$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ tels que $M = N + \lambda I$, $M' = N' + \lambda' I$. D'où $MM' = NN' + \lambda' N + \lambda N' + \lambda\lambda' I$.

Or $NN' \in F$ (car F stable par $\times$) et $NN' + \lambda' N + \lambda N' \in F$ (car F s.e.v. de E)

Donc $p(MM') = \lambda\lambda' I = p(M)p(M')$

b) Si $M^2 \in F$, $p(M^2) = 0$. Or $p(M^2) = [p(M)]^2$ d'après ce qui précède.
Si $p(M) = \lambda I$, on a donc $\lambda^2 I = 0$ d'où $\lambda = 0$ d'où $p(M) = 0$. Donc $M \in \mathrm{Ker}\, p = F$.

---

3) • $M_2^2 = 0 = M_3^2$ et $0 \in F$, donc $M_2, M_3 \in F$ d'après ce qui précède.

- $M_1 = M_2 M_3$ et F stable par $\times$, donc $M_1 \in F$
- $M_4 = M_3 M_2$ " " donc $M_4 \in F$.

---

4) Ainsi la famille libre $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ est dans F, alors que $\dim F = 3$: contradiction.
On conclut : $\underline{I \in F}$.

II 1) a) $\underline{\varphi(A) \text{ linéaire}}$: on vérifie aisément : $\forall (M,N) \in E^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$
$$\varphi(A)(\lambda M + \mu N) = \lambda\, \varphi(A) M + \mu\, \varphi(A) N.$$

b) - Soient $(A,B) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour toute $M \in E$:
$$\varphi(\lambda A + \mu B)(M) = \lambda \varphi(A)(M) + \mu \varphi(B)(M) \quad (\text{calcul immédiat !})$$
d'où $\varphi(\lambda A + \mu B) = \lambda \varphi(A) + \mu \varphi(B)$: $\underline{\varphi \text{ est linéaire de } E \text{ dans } \mathcal{L}(E)}$

- $\forall M \in E$, $\varphi(\lambda I)(M) = \lambda I M - \lambda M I = 0$ d'où $\underline{\varphi(\lambda I) = 0_{\mathcal{L}(E)}}$

c) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\varphi(A) = 0$. Alors : $\forall M \in E$, $\varphi(A)(M) = 0$.
En particulier : $\varphi(A)(M_1) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\underline{b = c = 0}$

et $\varphi(A)(M_2) = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\underline{a = d}$

[Rem : cf. d'ailleurs un exercice classique fait en classe...]

d) D'après b), $\mathbb{R} I \subset \operatorname{Ker} \varphi$ et d'après c), $\operatorname{Ker}\varphi \subset \mathbb{R} I$.
D'où $\underline{\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R} I}$ et le théorème du rang donne $\underline{\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim E - \dim \operatorname{Ker}\varphi = 3}$
(car $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E))$).

---

2) a) - $D \neq \emptyset$ car $0_{\mathcal{L}(E)} \in D$

- Soient $u, v \in D$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda u + \mu v \in D$ car :

$\forall (M,N) \in E^2$, $(\lambda u + \mu v)(MN) = \lambda u(MN) + \mu v(MN) = \lambda [u(M)N + M u(N)] + \mu [v(M)N + M v(N)]$
$$= (\lambda u + \mu v)(M) N + M (\lambda u + \mu v)(N)$$

Ainsi, $\underline{D \text{ est bien un s.e.v. de } \mathcal{L}(E)}$.

b) $\forall A \in E$, $\varphi(A) \in D$ car : $\forall (M,N) \in E^2$:
$$\varphi(A)(M) N + M \varphi(A) N = (AM - MA)N + M(AN - NA) = AMN - MAN + MAN - MNA$$
$$= A(MN) - (MN)A = \varphi(A)(MN)$$

Donc : $\underline{\operatorname{Im}\varphi \subset D}$.

---

3) a) Si $u \in D$: $u(I^2) = u(I) I + I u(I) = 2u(I)$ d'où $u(I) = 2u(I)$ et
donc $\underline{u(I) = 0}$

b) $M_2^2=0$ d'où $0=u(M_2^2)=u(M_2)M_2+M_2\,u(M_2)$. En remplaçant dans cette égalité $u(M_2)$ par $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix}$, un rapide calcul donne $z=0$, $t=-x$ soit $u(M_2)=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x\end{pmatrix}$

c) $M_3^2=0$ d'où $0=u(M_3^2)=u(M_3)M_3+M_3\,u(M_3)$. On fait comme ci-dessus et on trouve $u(M_3)=\begin{pmatrix} -t & 0 \\ z & t\end{pmatrix}$

d) $M_2M_3+M_3M_2=M_1+M_4=I$ donc $u(M_2M_3+M_3M_2)=u(I)=0$

soit $u(M_2)M_3+M_2u(M_3)+u(M_3)M_2+M_3u(M_2)=0$.

En remplaçant alors dans cette égalité $u(M_2)$ et $u(M_3)$ par les valeurs trouvées dans les questions précédentes, on obtient facilement $\underline{y+z=0}$.

e) • Compte tenu des valeurs de a,b,c,d, il est facile de vérifier que :

$\varphi(A)(M_2)=AM_2-M_2A=u(M_2)$ et $\varphi(A)(M_3)=AM_3-M_3A=u(M_3)$

• Or $M_1=M_2M_3$ donc $u(M_1)=u(M_2)M_3+M_2u(M_3)$

De plus, $\varphi(A)\in D$ donc on a aussi $\varphi(A)(M_1)=\varphi(A)(M_2)M_3+M_2\,\varphi(A)(M_3)$.

On en déduit, sans calcul : $\varphi(A)(M_1)=u(M_1)$.

• De même, $M_4=M_3M_2$ conduit à : $\varphi(A)(M_4)=u(M_4)$

• $\varphi(A)$ et u, linéaires, coïncident donc pour les vecteurs M_1,M_2,M_3,M_4 d'une base de E. Donc $\underline{\varphi(A)=u}$.

---

4) • On avait déjà $\mathrm{Im}\varphi=D$

• Soit $u\in D$. On sait qu'il existe x,y,z,t avec $y+z=0$ tels que $u(M_2)=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x\end{pmatrix}$ et $u(M_3)=\begin{pmatrix} -t & 0 \\ z & t\end{pmatrix}$. Il existe alors des réels a,b,c,d tels que

$\begin{cases} a-d=y \\ c=-x \\ b=-t\end{cases}$ (système compatible !). Et, si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, on a $u=\varphi(A)$, donc $u\in\mathrm{Im}\varphi$.

Ainsi, $D\subset\mathrm{Im}\varphi$ et, finalement : $\underline{D=\mathrm{Im}\varphi}$
