RÉSEAU IBNGHAZI
MP* 1 (Rabat)
Groupe 2

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
تمّوني مولاي اسماعيل

Devoir Surveillé N° 3

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Algèbres de Lie

Dans tout ce problème, n est un entier au moins égal à 1. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients complexes.

On identifiera une matrice colonne X (un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) et le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont les composantes dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ sont les coefficients de la matrice X. Pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ l'endomorphisme canoniquement associé de $\mathbb{C}^n$: $\overline{M}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Par ailleurs, $E_\lambda(\overline{M})$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ de l'endomorphisme $\overline{M}$.

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ de coefficients $(m_{ij}, i, j = 1, \cdots, n)$ et pour $k = 0, \cdots, n-1$, on appelle k-ième diagonale supérieure de M, notée $D_k(M)$, l'ensemble des coefficients $(m_{i,i+k}, i = 1, \cdots, n-k)$. Une diagonale supérieure $D_k(M)$ est dite nulle lorsque tous ses éléments sont nuls.

Si V et W sont deux espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$, on note p_V la projection sur V parallèlement à W : pour $x = x_V + x_W$ avec $x_V \in V$ et $x_W \in W$, $p_V(x) = x_V$. Pour un endomorphisme u de $\mathbb{C}^n$, on note u_V sa restriction à V.

De sorte que si i_V représente l'injection de V dans $\mathbb{C}^n$, $u_V(y) = u(i_V(y))$ pour tout $y \in V$.

I Algèbres de Lie

On appelle crochet de Lie de deux éléments X et Y de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ la matrice, notée $[X,Y]$, définie par

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Définition 1 *Soit $\mathcal{U}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. On note $[\mathcal{U}]$ l'espace vectoriel engendré par les crochets de Lie $[X,Y]$ lorsque X et Y décrivent $\mathcal{U}$. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie lorsque*

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{U}.$$

Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux algèbres de Lie qui vérifient

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}.$$

On souhaite prouver le théorème suivant.

Théorème 1 *Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est une colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$ et si A est une matrice dans $\mathcal{U}$ alors AX est soit la matrice colonne nulle, soit une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$. De plus, si pour $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda X$ alors $M(AX) = \lambda(AX)$.*

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$, et soit A une matrice de $\mathcal{U}$.

❑ 1 - Établir l'existence d'une forme linéaire λ sur $\mathcal{V}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda(M)X$.

❑ 2 - Montrer que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $[M, A]$ appartient à $\mathcal{V}$.

On considère la suite de matrices colonnes $(X_k, k \geq 0)$ définie par

$$X_0 = X, \quad X_{k+1} = AX_k, \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Pour $M \in \mathcal{V}$, on considère la suite de nombres complexes $(\lambda_k(M), k \geq 0)$ définie par

$$\begin{aligned} \lambda_0(M) &= \lambda(M) \\ \lambda_{k+1}(M) &= \lambda_k([M, A]), \text{ pour tout } k \geq 0. \end{aligned}$$

❑ 3 - Démontrer, pour tout entier $i \geq 0$ et pour tout $M \in \mathcal{V}$, les identités suivantes :

$$MX_i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \, \lambda_{i-j}(M) \, X_j \tag{1}$$

$$[M, A]X_i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \, \lambda_{i-j+1}(M) \, X_j. \tag{2}$$

❑ 4 - On identifie dorénavant matrices colonnes et vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Démontrer qu'il existe un plus grand entier q tel que la famille de vecteurs $\{X_0, X_1, X_2, \cdots, X_q\}$ soit libre.

On note G l'espace vectoriel engendré par la famille $\{X_0, X_1, X_2, \cdots, X_q\}$.

❑ 5 - Montrer que $\overline{M}_G$, $\overline{A}_G$ et $\overline{[M, A]}_G$ sont des endomorphismes de G.

❑ 6 - Calculer la trace de $\overline{[M, A]}_G$.

❑ 7 - Quelle est la matrice de $\overline{[M, A]}_G$ dans la base $\{X_0, X_1, X_2, \cdots, X_q\}$?

❑ 8 - Pour $M \in \mathcal{V}$, que vaut $\lambda([M, A])$?

❑ 9 - Établir le théorème 1.

II Algèbres de Lie résolubles

Définition 2 *Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie et p un entier naturel non nul. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur p lorsqu'il existe des algèbres de Lie $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \cdots, \mathcal{U}_p$ telles que :*

$$\{0\} = \mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_{p-1} \subset \cdots \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \tag{A}$$

$$[\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1} \text{ pour tout } i \in \{0, \cdots, p-1\}. \tag{B}$$

On se propose de montrer le théorème suivant.

Théorème 2 *$\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.*

Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{T}_P$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

❏ 10 - Traduire la propriété « il existe une matrice P inversible telle que pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure » en une propriété sur les endomorphismes canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{U}$.

❏ 11 - Montrer que $\mathcal{T}_P$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur n.

On pourra considérer les sous-espaces $\mathcal{N}_k$ $(0 \leq k \leq n)$ tels que $\mathcal{N}_0 = \mathcal{T}_P$ et pour tout entier k $(1 \leq k \leq n)$, $\mathcal{N}_k$ est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{T}_P$ telles que les k diagonales supérieures $D_0(P^{-1}MP)$, $D_1(P^{-1}MP)$, ..., et $D_{k-1}(P^{-1}MP)$ sont nulles.

Dans les questions 12 à 17, on suppose que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p = 1$.

❏ 12 - Montrer que pour tout $M, M' \in \mathcal{U}$, on a $MM' = M'M$.

❏ 13 - Soit r un entier non nul et une famille $M_1, M_2, \cdots, M_r$ d'éléments de $\mathcal{U}$. Montrer qu'il existe un vecteur propre commun aux endomorphismes $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \cdots, \overline{M}_r$.

❏ 14 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\{\overline{M},\ M \in \mathcal{U}\}$.

On note dorénavant :

$$\overline{\mathcal{U}} = \{\overline{M},\ M \in \mathcal{U}\}.$$

Soit F et H deux espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$ et u et v deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. De plus, on suppose, d'une part, que F est stable par u et v et, d'autre part, que u et v commutent.

❏ 15 - Montrer les relations suivantes :

$$p_H\, u = p_H\, u\, p_H \text{ et } p_H\, v = p_H\, v\, p_H.$$

❏ 16 - Montrer que $p_H\, u\, p_H$ et $p_H\, v\, p_H$ commutent puis que $p_H\, u_H$ et $p_H\, v_H$ commutent.

❏ 17 - En procédant par récurrence sur n, établir le théorème 2 dans le cas $p = 1$.

Soit, maintenant, $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie résoluble de longueur $p > 1$.

On suppose établi que pour toute algèbre de Lie résoluble de longueur inférieure strictement à p, il existe un élément $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, inversible, tel que pour toute matrice M dans cette algèbre, $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

❏ 18 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\overline{M}, M \in \mathcal{U}_1$.

Soit X l'un de ces vecteurs propres. On note E l'espace vectoriel engendré par X et les éléments de la forme

$$\overline{A_1} \dots \overline{A_k} X$$

où k est un entier non nul, $A_j \in \mathcal{U}$ pour tout j.

❏ 19 - Montrer que E est un espace vectoriel stable par tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$ et que tous les éléments de E sont des vecteurs propres communs à tous les endomorphismes de $\overline{\mathcal{U}_1}$.

Soit $M, M' \in \mathcal{U}$.

❏ 20 - Montrer que $\overline{[M, M']}_E$ est une homothétie de trace nulle.

❏ 21 - Que peut-on en déduire?

Le théorème 2, dans le cas général, se prouve alors par les mêmes raisonnements qu'aux questions 14 et 17.

Fin du problème

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مُوني مُولَاي اسماعِيل

Devoir Survéillé N° 3

Corrigé

I Algèbres de Lie

1 - Pour toute matrice M de $\mathcal{V}$, X est un vecteur propre de M : il existe donc un unique scalaire $\lambda(M)$ tel que $MX = \lambda(M)X$. Pour $M_1, M_2 \in \mathcal{V}$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$,

$$(\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2)X = (\mu_1\lambda(M_1) + \mu_2\lambda(M_2))X$$

et donc $\lambda(\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2) = \mu_1\lambda(M_1) + \mu_2\lambda(M_2)$: l'application $\lambda : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ est bien une forme linéaire.

2 - Comme M et A sont éléments de $\mathcal{U}$, $[M, A] \in [\mathcal{U}]$ et donc $[M, A] \in \mathcal{V}$.

3 - Considérons l'hypothèse de récurrence (H_i) :

$$\forall M \in \mathcal{V},\ MX_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M)X_j$$

- La propriété H_0 est trivialement vérifiée :

$$\forall M \in \mathcal{V},\ MX_0 = MX = \lambda(M)X = \lambda_0(M)X_0 = \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} \lambda_{-j}(M)X_j$$

- Soit $i \in \mathbb{N}$ et supposons que H_i soit vérifiée. Alors pour tout $M \in \mathcal{V}$:

$$MX_{i+1} = MAX_i = [M, A]X_i + AMX_i$$

En appliquant (H_i) aux deux éléments M et $[M, A]$ de $\mathcal{V}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
MX_{i+1} &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}([M, A])X_j + A\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M)X_j \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M)X_j + \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M)X_{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M)X_j + \sum_{j=1}^{i+1} \binom{i}{j-1} \lambda_{i-j+1}(M)X_j \\
&= \lambda_{i+1}(M)X_0 + \sum_{j=1}^{i} \underbrace{\left[\binom{i}{j} + \binom{i}{j-1}\right]}_{=\binom{i+1}{j}} \lambda_{i-j+1}(M)X_j + \lambda_0(M)X_{i+1} \\
&= \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \lambda_{i+1-j}(M)X_j
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré par récurrence que (H_i) est vérifiée pour tout $i \in \mathbb{N}$, ce qui donne bien les identités (1) et (2).

4 - L'ensemble des entiers $i \geq 0$ pour lesquels la famille $\{X_0, X_1, \ldots, X_i\}$ est libre est non vide (il contient 0 car X_0 est non nul) et majoré par n : il admet donc un plus grand élément q.

5 - La stabilité de G par $\overline{M}$ découle directement des relations (1).

D'autre part :

- pour i compris entre 0 et $q-1$, $\overline{A}(X_i) = AX_i = X_{i+1} \in G$;

- $\overline{A}(X_q) = X_{q+1} \in G$ car $\{X_0, X_1, \ldots, X_q\}$ est libre et $\{X_0, X_1, \ldots, X_{q+1}\}$ est liée,

donc G est également stable par $\overline{A}$.

Enfin, par composition, G est stable par $\overline{[M, A]}$. On en déduit que $\overline{M_G}$, $\overline{A_G}$ et $\overline{[M, A]}_G$ sont des endomorphismes de G.

6 - Comme $\overline{[M, A]}_G = \overline{M}_G \circ \overline{A}_G - \overline{A}_G \circ \overline{M}_G$, la trace de $\overline{[M, A]}_G$ est nulle (linéarité de la trace et propriété classique $\operatorname{Tr}(f \circ g) = \operatorname{Tr}(g \circ f)$).

7 - Les relations (2) montrent que cette matrice est triangulaire supérieure, de terme général $\begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix} \lambda_{i-j+1}(M)$ pour $1 \leq j \leq i \leq q+1$.

8 - En particulier, $0 = \operatorname{Tr}(\overline{[M, A]}_G) = (q+1)\lambda_1(M) = (q+1)\lambda([M, A])$ et $\lambda([M, A]) = 0$ puisque $q + 1 > 0$.

9 - Nous en déduisons que $MAX = AMX$, i.e. $M(AX) = A(\lambda(M)X) = \lambda(M)(AX)$. Ainsi, ou bien $AX = 0$, ou bien AX est un vecteur propre pour chaque matrice M de $\mathcal{V}$, associé à la même valeur propre que X.

II Algèbres de Lie résolubles

10 - Cette propriété traduit que les endomorphismes associés aux éléments de $\mathcal{U}$ sont simultanément trigonalisables, i.e. trigonalisables dans une même base de $\mathbb{C}^n$.

11 - Pour tout k compris entre 0 et n, notons E_k le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ engendré par les k premiers vecteurs colonnes de la matrice P. Une matrice A est donc dans $\mathcal{N}_k$ si et seulement si

$$\overline{A}(E_n) \subset E_{n-k},\ \overline{A}(E_{n-1}) \subset E_{n-1-k},\ \ldots,\ \overline{A}(E_k) \subset E_0.$$

Pour k entier compris entre 0 et $n-1$, montrons que $[\mathcal{N}_k] \subset \mathcal{N}_{k+1}$:

- si $k \geq 1$ et si A et B sont deux éléments de $\mathcal{N}_k$, on a pour tout i compris entre $k+1$ et n :

$$\begin{array}{rcl} \overline{[A, B]}(E_i) & \subset & \overline{A}(\overline{B}(E_i)) + \overline{B}(\overline{A}(E_i)) \\ & \subset & \overline{A}(E_{i-k}) + \overline{B}(E_{i-k}) \\ & \subset & E_{i-k-1} \end{array}$$

  car $k \geq 1$. On a donc $[A, B] \in \mathcal{N}_{k+1}$.

- si $k = 0$ et si A et B sont deux éléments de $\mathcal{N}_k$, les matrices AB et BA sont triangulaires supérieures et ont même diagonale : la matrice $[A, B]$ est donc diagonale supérieure stricte, i.e. que $[A, B] \in \mathcal{N}_{k+1}$.

Dans tous les cas, $[\mathcal{N}_k] \subset \mathcal{N}_{k+1}$ puisque $\mathcal{N}_{k+1}$ est un sous-espace vectoriel.

Ceci prouve que la suite $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n)$ est une suite d'algèbres de Lie vérifiant les propriétés (A) et (B) : $\mathcal{T}_P$ est donc une algèbre de Lie résoluble de longueur n.

Remarques : la longueur obtenue ici n'est pas optimale. Par exemple, quand $n = 4$, $\mathcal{T}_P$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur 3, puisque $[\mathcal{N}_2] = \{0\}$.

Cette question prouve en fait une implication du théorème 2 : si $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie dont les éléments sont simultanément trigonalisables, il existe une matrice inversible P telle que $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_P$. On obtient alors que $\mathcal{U}$ est résoluble de longueur n en considérant la suite $(\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_k)_{0 \leq k \leq n}$.

12 - Nous avons $[\mathcal{U}] = [\mathcal{U}_0] \subset \mathcal{U}_1 = \{0\}$, donc $[M, M'] = 0$ pour tous $M, M' \in \mathcal{U}$: les éléments de $\mathcal{U}$ commutent deux à deux.

13 - Prouvons le résultat suivant par récurrence sur r : r endomorphismes d'un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle qui commutent deux à deux possèdent un vecteur propre commun.

- Si $r = 1$ et si $f_1 \in \mathcal{L}(E)$ avec E espace complexe de dimension non nulle, f_1 possède au moins une valeur propre (son polynôme caractéristique est de degré au moins 1 et $\mathbb{C}$ est algébriquement clos), donc également un vecteur propre.

- Soit $r \geq 1$. Supposons la propriété vérifiée au rang r et considérons une famille $(f_i)_{1 \leq i \leq r+1}$ d'endomorphismes d'un espace vectoriel complexe E de dimension non nulle. f_{r+1} possède au moins une valeur propre λ : notons $F = \mathrm{Ker}\,(f_{r+1} - \lambda Id_E)$ l'espace propre associé. On montre alors facilement que F est stable par les f_i, pour i variant de 1 à r :

$$\forall\, i,\ \forall x \in F,\ f_{r+1}(f_i(x)) = f_i(f_{r+1}(x)) = f_i(\lambda x) = \lambda f_i(x)$$

  En notant g_i la restriction de f_i à F, il est possible d'appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(g_i)_{1 \leq i \leq r}$ (F est de dimension non nulle et les g_i commutent deux à deux) : il existe un vecteur $x \in F$ qui est propre pour tous les g_i : ce vecteur est donc un vecteur propre pour tous les f_i $(0 \leq i \leq r+1)$.

Le résultat demandé est alors une conséquence directe.

14 - Soit $(M_1, M_2, \dots, M_r)$ une base de $\mathcal{U}$. D'après le résultat précédent, il existe un vecteur propre X commun aux endomorphismes $\overline{M_1}, \overline{M_2}, \dots, \overline{M_r}$: si $M \in \mathcal{U}$, avec $M = \alpha_1 M_1 + \cdots + \alpha_r M_r$, on a directement :

$$\overline{M}(X) = \alpha_1 \lambda(M_1) X + \cdots + \alpha_r \lambda(M_r) X = (\alpha_1 \lambda(M_1) + \cdots + \alpha_r \lambda(M_r))\, X$$

et donc X est propre pour tous les endomorphismes associés aux éléments de $\mathcal{U}$.

Remarque : il aurait été plus pratique de démontrer directement par récurrence sur n le résultat classique : pour toute famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 1$ commutant deux à deux, il existe un vecteur propre commun à tous les éléments de la famille.

15 - En travaillant matriciellement, les questions 15 et 16 deviennent triviales. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases de F et$H$, et soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Les matrices U et V de u et v dans la base $\mathcal{B}$ sont de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ 0 & N_3 \end{pmatrix}$$

où M_1 et N_1 sont carrées de taille $\dim(F)$.

On en déduit :

$$\begin{cases} \mathrm{Mat}(p_H u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \\ \\ \mathrm{Mat}(p_H u p_H, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

donc $p_H u = p_H u p_H$ (et de même $p_H v = p_H v p_H$).

16 - Comme u et v commutent, U et V commutent, i.e.

$$\begin{pmatrix} M_1 N_1 & M_1 N_2 + M_2 N_3 \\ 0 & M_3 N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 M_1 & N_1 M_2 + N_2 M_3 \\ 0 & N_3 M_3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que les matrices M_3 et N_3 commutent, et donc que $p_H u p_H$ et $p_H v p_H$ commutent, ainsi que $p_H u_H$ et $p_H v_H$ (puisque M_3 et N_3 sont les matrices de $p_H u_H$ et $p_H v_H$ dans la base $\mathcal{B}_2$.

17 - L'énoncé doit être compris sous la forme "démontrer le sens direct du théorème dans le cas $p = 1$". Il y a également une maladresse importante : les notions d'algèbres de Lie et de résolubilité sont définies uniquement matriciellement, et il serait pénible de revenir par récurrence à des algèbres de matrices (en restreignant les endomorphismes $\overline{M}$ à un sous-espace stable H, on obtient des endomorphismes et pas des matrices : le retour à des matrices nécessite de fixer une base de H). Nous parlerons donc ici d'algèbres de Lie en un sens à peine plus général : une algèbre de Lie sur un espace vectoriel (complexe) E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par crochet de Lie ($[f, g] = f \circ g - g \circ f$).

Considérons donc la proposition :

$(\mathcal{H}_n)$: si $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie sur un espace vectoriel complexe E de dimension n et si $\mathcal{U}$ est résoluble de longueur 1 (ce qui revient à dire que les éléments de $\mathcal{U}$ commutent deux à deux), les éléments de $\mathcal{U}$ sont simultanément trigonalisables.

- La propriété $\mathcal{H}_1$ est clairement vérifiée, puisque toute matrice de taille 1 est triangulaire.

- Soit $n \geq 2$ et supposons que $\mathcal{H}_{n-1}$ est vérifiée. Considérons alors une algèbre de Lie résoluble de longueur 1 d'un espace vectoriel complexe E de dimension n. D'après la question 14, il existe un vecteur propre e_1 commun à tous les éléments de $\mathcal{U}$. Notons F la droite engendrée par e_1 (F est stable par tous les éléments de $\mathcal{U}$) et choisissons un hyperplan H supplémentaire de F. Notons alors $\mathcal{U}'$ l'ensemble des $p_H u_H$ pour $u \in \mathcal{U}$. D'après la question 16, les éléments de $\mathcal{U}'$ commutent deux à deux : on en déduit que $\mathcal{U}'$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur 1 de l'espace H. Par hypothèse de récurrence, il existe un base $\mathcal{B}_2 = (e_2, \ldots, e_n)$ de H telle que la matrice de $p_H u_H$ dans $\mathcal{B}_2$ soit triangulaire supérieure pour tout $u \in \mathcal{U}$. La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est alors une base de E qui trigonalise simultanément tous les éléments de $\mathcal{U}$.

Le sens direct du théorème est donc ainsi démontré quand $p = 1$.

18 - Comme $\mathcal{U}_1$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p-1$, il existe une base qui trigonalise (supérieurement) tous les éléments de $\mathcal{U}_1$: le premier vecteur de cette base est donc un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\overline{M}$ pour $M \in \mathcal{U}_1$.

19 - Notons $\mathcal{G}$ l'ensemble générateur de E. Par définition, $\mathcal{G}$ est stable par tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$, donc E l'est également.

D'autre part, le théorème 1 permet d'affirmer que si $A \in \mathcal{U}$, AX est soit nul, soit un vecteur propre commun à tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}_1}$. Par récurrence sur k, on en déduit que les éléments non nuls de $\mathcal{G}$ sont des vecteurs propres communs à tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}_1}$. Par linéarité, cette propriété s'étend à E : les éléments non nuls de E sont tous vecteurs propres communs à tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}_1}$.

20 - Notons f l'endomorphisme $\overline{[M,M']}_E$. Comme $[M,M'] \in \mathcal{U}_1$, pour tout $y \in E \setminus \{0\}$, il existe $\lambda(y) \in \mathbb{C}$ tel que $f(y) = \lambda(y)\,y$. Si y_1 et y_2 sont deux vecteurs indépendants de E, alors :

$$\lambda(y_1+y_2)y_1 + \lambda(y_1+y_2)y_2 = \lambda(y_1+y_2)\,(y_1+y_2) = f(y_1+y_2) = f(y_1)+f(y_2) = \lambda(y_1)y_1 + \lambda(y_2)y_2$$

et donc $\lambda(y_1) = \lambda(y_1+y_2) = \lambda(y_2)$.

Si maintenant y_1 et y_2 sont deux vecteurs non nuls liés de E, on peut écrire $y_2 = \alpha y_1$ (avec α non nul) et

$$\lambda(y_2)\alpha\, y_1 = \lambda(y_2)\, y_2 = f(y_2) = \alpha\, f(y_1) = \alpha\lambda(y_1)\, y_1$$

et donc $\lambda(y_1) = \lambda(y_2)$. En notant λ la valeur commune $\lambda(y)$, f est l'homothétie de rapport λ.

Enfin, comme E est stable par $\overline{M}$ et $\overline{M'}$, on peut écrire :

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\overline{M}_E \circ \overline{M'}_E - \overline{M'}_E \circ \overline{M}_E) = 0.$$

21 - Comme la trace de f est égale à $\lambda \dim(E)$ et que E est de dimension non nulle, $\lambda = 0$: ceci prouve que les éléments de $\mathcal{U}' = \{\overline{M}_E,\ M \in \mathcal{U}\}$ commutent deux à deux. Comme cette famille est clairement une algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$, c'est une algèbre de Lie résoluble de longueur 1 de E. D'après la question 17, il existe donc une base de E qui trigonalise tous les endomorphismes $\overline{M}_E$ pour $U \in \mathcal{U}$.