RÉSEAU IBNGHAZI
MP* 1 (Rabat)
Groupe 2

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مَمُوني مُولَاي اسمَاعيل

DS N° 5 : Analyse

Durée : 4 heures

Epreuve B : Extrait Mines

Soit $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des réels définis par les relations suivantes :

$$B_0 = 1,\ B_1 = 1,\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à } 1,\ B_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, B_p.$$

Les réels C_n^p sont les coefficients du binôme ; le nombre réel C_n^p, noté aussi $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, est égal au cardinal de l'ensemble des parties ayant p éléments d'un ensemble ayant n éléments.

PREMIÈRE PARTIE

I-1. Fonction E :
Soit E la fonction définie sur la droite réelle $\mathbf{R}$ par la relation suivante :

$$E(x) = \exp(\exp x) = e^{e^x}.$$

a. Démontrer que la fonction E est développable en série entière sur la droite réelle $\mathbf{R}$.

b. Étant donné un entier naturel n, soit A_n le réel égal à la valeur de la dérivée n-ième de la fonction E en 0 :

$$A_n = E^{(n)}(0).$$

Démontrer, en admettant les conventions habituelles $0^0 = 0! = 1$, la relation suivante :

$$A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}\ .$$

c. Établir, pour tout entier naturel n ($n \geq 0$), une relation de récurrence exprimant A_{n+1} en fonction de $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n$.

En déduire l'expression suivante du réel B_n en fonction de A_n :

$$B_n = \frac{1}{e}\, A_n.$$

I-2. **Comparaison de sommes infinies** :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs ($u_n > 0$) ; on suppose que, pour tout entier naturel n, la série de terme général $u_k\, k^n,\ k = 1, 2, ...,$ est convergente. Soit U_n sa somme :

$$U_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\, k^n.$$

a. Démontrer que, pour tout entier p donné supérieur ou égal à 1 ($p \geq 1$), lorsque l'entier n croît vers l'infini, le réel U_n est équivalent au reste d'ordre p de la série défini par la relation : $R_{p,\,n} = \sum_{k=p}^{\infty} u_k\, k^n$; c'est-à-dire :

$$\text{pour tout entier strictement positif } p, \quad U_n \sim R_{p,\,n} = \sum_{k=p}^{\infty} u_k\, k^n.$$

b. Étant données deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs $\left(u_n > 0,\ v_n > 0\right)$, démontrer que, si les réels u_n et v_n sont équivalents lorsque l'entier n croît vers l'infini ($u_n \sim v_n$), les deux suites de réels $U_n,\ n = 1, 2, \ldots$ et $V_n,\ n = 1, 2, \ldots$ définis par les relations suivantes :

$$U_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\, k^n, \quad V_n = \sum_{k=1}^{\infty} v_k\, k^n,$$

sont équivalentes, lorsque l'entier n croît vers l'infini :

$$U_n \sim V_n.$$

I-3 Fonction f_n :

Étant donné un entier n strictement positif ($n \geq 1$), soit f_n la fonction définie sur la droite réelle **R** par la relation suivante :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \ \text{si } x \leq 0, \\ e^x\, x^{-x+n-1/2}, \ \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Étant donné un entier n strictement positif ($n \geq 1$), soit s_k le réel défini par la relation suivante :

$$s_k = f_n(k).$$

a. Étudier, pour un entier n donné, la convergence de la série de terme général s_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$; soit S_n la somme de cette série :

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k).$$

b. Démontrer, lorsque l'entier n croît vers l'infini, l'équivalence suivante :

$$A_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k).$$

DEUXIÈME PARTIE

Étant donné un réel λ strictement positif ($\lambda > 0$), soit Φ_λ la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$, par la relation suivante :

$$\Phi_\lambda(x) = -x \ln x + x + \lambda \ln x.$$

II-1.Étude de la fonction Φ_λ :

a. Déterminer des équivalents de $\Phi_\lambda(x)$ dans des voisinages de 0 et de l'infini.

b. Déterminer les variations de la fonction Φ_λ sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$; établir en particulier l'existence d'un réel μ en lequel la fonction Φ_λ atteint son maximum.

c. Soit φ la fonction qui, au réel λ, associe le réel μ. Démontrer que cette fonction φ, définie sur la demi-droite $]0, \infty[$, est continûment dérivable.

Pour tous réels x et λ strictement positifs, la relation ci-dessous, dans laquelle le réel μ est l'image par la fonction φ du réel λ ($\mu = \varphi(\lambda)$), est admise :

$$\Phi_\lambda\big(\mu\,(1+x)\big) = \Phi_\lambda(\mu) + (\mu - \lambda)(x - \ln(1+x)) - \mu\, x\, \ln(1+x).$$

II-2. Maximum de la fonction f_n :

a. Démontrer que, pour tout entier n strictement positif, la fonction f_n admet un maximum en un unique point μ_n. Est-ce que la fonction f_n est continûment dérivable sur la droite réelle $\mathbf{R}$?

b. Établir les propriétés suivantes vérifiées par les réels μ_n ($n \geq 1$) :

i. En admettant les inégalités suivantes,

$$0 < \frac{1}{2} < 2\ln 2 < \frac{3}{2},$$

démontrer que les réels μ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ vérifient les encadrements suivants :

$$1 < \mu_1 < 2 < \mu_2 \text{ ; pour tout entier supérieur ou égal à 3 :} \sqrt{n} < \mu_n < n.$$

ii. le réel μ_n est négligeable devant l'entier n lorsque l'entier n croît vers l'infini :

$$\mu_n = o(n) \text{ lorsque } n \to \infty.$$

iii. pour tout réel α compris strictement entre 0 et 1, le réel n^α est négligeable devant μ_n, lorsque l'entier n croît vers l'infini :

$$n^\alpha = o(\mu_n) \text{ lorsque } n \to \infty.$$

TROISIÈME PARTIE

Étant donné un entier n strictement positif ($n \geq 1$), soit g_n la fonction définie sur la droite réelle **R** par la relation suivante :

$$g_n(x) = \frac{1}{f_n(\mu_n)} f_n\left(\mu_n\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

III-1. **Propriétés de la fonction g_n** :

a. Vérifier, pour tout entier n strictement positif et tout réel x, la relation suivante :

$$f_n(x) = f_n(\mu_n)\, g_n\left(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}x - \sqrt{n}\right).$$

b. Donner l'allure du graphe de la fonction g_n.

c. Démontrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction g ; expliciter cette fonction g.

d. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 ($n \geq n_0$) et tout réel x strictement supérieur à $-\sqrt{n}$ ($x > -\sqrt{n}$), la fonction g_n vérifie la majoration suivante :

$$g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{n}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right).$$

III-2 : **Une majoration de la fonction g_n** :

a. Soit u la fonction définie par la relation suivante :

$$u(x) = \frac{1}{x^2}\,(x - \ln(1+x)).$$

Démontrer que cette fonction se prolonge en une fonction dérivable sur la demi-droite ouverte $]-1, \infty[$; démontrer que cette fonction u est décroissante sur cet intervalle. Préciser son signe.

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à l'entier n_0 introduit à la question III-1.d, la fonction g_n, définie sur la droite réelle, vérifie les majorations suivantes :

$$g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right), \text{ si } x \leq 0 \quad ; \quad g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \ln(1+x))\right), \text{ si } x \geq 0.$$

QUATRIÈME PARTIE

Recherche d'un équivalent du réel B_n lorsque l'entier n croît indéfiniment.

IV-1. Intégrabilité de la fonction g_n :

Démontrer que, pour tout entier n strictement positif, la fonction g_n est intégrable sur la droite réelle. Soit I_n la valeur de son intégrale :

$$I_n = \int_{\mathbf{R}} g_n(x)\, dx.$$

Démontrer que la suite de réels $(I_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Il est admis que la limite de cette suite est égale à $\sqrt{2\pi}$.

IV-2. Un encadrement de la somme S_n :

Étant donné un entier n strictement positif, d'après la question I-3.a, le réel S_n est la somme de la série de terme général $f_n(k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

Déterminer des réels K_n et ε_n tels que la somme S_n soit encadrée de la manière suivante au moyen de l'intégrale I_n :

$$K_n(I_n - \epsilon_n) \leq S_n \leq K_n(I_n + \epsilon_n).$$

Les réels K_n et ϵ_n seront explicités en fonction de $n,\ \mu_n$ et de la fonction f_n. La suite ϵ_n tend vers 0.

Indication : Soit p l'entier égal à la partie entière du réel μ_n ; cet entier est défini par les inégalités ci-dessous :

$$p \leq \mu_n < p + 1.$$

Déterminer des encadrements des deux sommes S_n' et S_n'' définies par les relations suivantes :

$$S_n' = \sum_{k=0}^{p} f_n(k) \quad ; \quad S_n'' = \sum_{k=p+1}^{\infty} f_n(k).$$

IV-3. Un équivalent du réel B_n :

Déduire des résultats précédents un équivalent du réel B_n lorsque l'entier n croît vers l'infini.

FIN DU PROBLÈME

MINES-PONTS 2002. Filière MP. MATHÉMATIQUES 1.

Corrigé de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

I.1. Fonction E.

a. Pour tout réel x, il vient $E(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{e^{kx}}{k!}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(kx)^n}{k!\;n!}\Big)$. Cette égalité est vraie en particulier pour $|x|$ ce qui prouve que la famille $\Big(\dfrac{(kx)^n}{k!\;n!}\Big)_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est sommable et le théorème de Fubini permet d'écrire :
$E(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{k^n}{k!}\Big)\dfrac{x^n}{n!}$. CQFD.

b. L'unicité du développement en série entière qui est celui de Mac-laurin fournit $A_n=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{k^n}{k!}$. CQFD.

c. Il vient $A_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{p=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\mathrm{C}_n^p\,k^p\Big)$. La famille $\Big(\dfrac{1}{k!}\mathrm{C}_n^p\,k^p\Big)_{(k,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}_n}$ étant positive, elle est donc sommable et là encore Fubini fournit $A_{n+1}=\sum\limits_{p=0}^{n}\mathrm{C}_n^p\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{k^p}{k!}$ i.e. $A_{n+1}=\sum\limits_{p=0}^{n}\mathrm{C}_n^p\,A_p$.
Ainsi la suite (A_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (B_n) avec $A_0=A_1=e$. Une itération immédiate prouve alors que $A_n=eB_n$. CQFD.

I.2. Comparaison de sommes infinies.

a. Comme $u_k>0$ pour tout k, $R_{p,n}\neq 0$ et $\dfrac{U_n}{R_{p,n}}=1+\alpha(p,n)$ avec $\alpha(p,n)=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{p-1}u_kk^n}{\sum\limits_{k=p}^{+\infty}u_kk^n}$.
Or $0\leqslant\sum\limits_{k=1}^{p-1}u_kk^n\leqslant\widetilde{u}_p(p-1)^n$ avec $\widetilde{u}_p=\max\big\{u_1,u_2,\dots,u_{p-1}\big\}$ et
$\sum\limits_{k=p}^{+\infty}u_kk^n\geqslant u_pp^n$ donc $0\leqslant\alpha(p,n)\leqslant\dfrac{\widetilde{u}_p}{u_p}\Big(\dfrac{p-1}{p}\Big)^n$ donc, pour $p\geqslant 1$ fixé quelconque, $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha(p,n)=0$.
Ainsi $U_n\sim R_{p,n}$ pour $p\geqslant 1$ fixé quelconque lorsque n tend vers $+\infty$. CQFD.

b. Soit $\varepsilon\in]0,1[$ fixé quelconque. Il existe p_0 tel que $(1-\varepsilon)u_k\leqslant v_k\leqslant(1+\varepsilon)u_k$ pour $k\geqslant p_0$.
Il en découle, avec des notations claires, $(1-\varepsilon)R_{p_0,n}(u)\leqslant R_{p_0,n}(v)\leqslant(1+\varepsilon)R_{p_0,n}(u)$.
Or $U_n\sim R_{p_0,n}(u)$ d'après la question précédente.
Donc il existe n_0 tel que $(1-\varepsilon)U_n\leqslant R_{p_0,n}(u)\leqslant(1+\varepsilon)U_n$ pour $n\geqslant n_0$.
Il en découle $(1-\varepsilon)^2U_n\leqslant R_{p_0,n}(v)\leqslant(1+\varepsilon)^2U_n$ pour $n\geqslant n_0$.
Ainsi $U_n\sim R_{p_0,n}(v)$. Or $R_{p_0,n}(v)\sim V_n$ d'après la question précédente. Donc $U_n\sim V_n$. CQFD.

I.3. Fonction f_n.

a. $x^2f_n(x)=\exp\big(-x\ln x+x+(n+3/2)\ln x\big)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc $f_n(k)=o(\dfrac{1}{k^2})$ et ainsi $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}f_n(k)$ converge. CQFD.

b. D'après la formule de Stirling, $\dfrac{1}{k!}\sim\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-k\ln k+k-1/2\ln k)$ donc d'après la question I.2.b. :
$A_n\sim\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}k^n\exp(-k\ln k+k-1/2\ln k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}f_n(k)$. CQFD.

II.1. Étude de la fonction ϕ_λ.

a. Au voisinage de 0, $\phi_\lambda(x)\sim\lambda\ln x$ et, au voisinage de $+\infty$, $\phi_\lambda(x)\sim -x\ln x$.

b. $\phi'_\lambda(x)=\dfrac{\lambda}{x}-\ln x$ et $\phi''_\lambda(x)=-\dfrac{\lambda+x}{x^2}$ donc ϕ'_λ décroît sur $]0,+\infty[$ de $+\infty$ à $-\infty$ et partant s'annule en un unique réel μ racine de l'équation $x\ln x-\lambda=0$.
Ainsi ϕ_λ croît sur $]0,\mu[$ de $-\infty$ à $\phi_\lambda(\mu)$ puis décroît sur $]\mu,+\infty[$ vers $-\infty$. CQFD.

c. Dans la suite on note $h(x)=x\ln x$. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et $h'(x)=1+\ln x>0$. Donc h réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme croissant de $]1,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.
Ainsi $\varphi=h^{-1}$ est-elle bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. CQFD.

II.2. Maximum de la fonction f_n.

a. Pour $x>0$ on a $f_n(x)=\exp\Big(\phi_{n-1/2}(x)\Big)$ de sorte que, sur $]0,+\infty[$, f_n admet un maximum en un unique point $\mu_n=\varphi(n-1/2)$, maximum strictement positif. C'est également le maximum de f_n sur $\mathbb{R}$ puisque f_n est nulle sur $]-\infty,0]$.
Ainsi f_n admet un unique maximum sur $\mathbb{R}$ atteint en le réel $\mu_n=\varphi(n-1/2)$. CQFD.

f_n est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0^-} f_n'(x)=0$. Donc, d'après le théorème de prolongement des applications $\mathcal{C}^1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n'(x)=0$.

Pour $x>0$ il vient $f_n'(x)=\phi_\lambda'(x)\exp\big(\phi_\lambda(x)\big)$ avec $\lambda=n-1/2$. Or au voisinage de 0^+, $\phi_\lambda'(x)=\dfrac{\lambda}{x}-\ln x\sim\dfrac{\lambda}{x}$ et $\phi_\lambda(x)=\lambda\ln x+o(1)$ donc $\exp\big(\phi_\lambda(x)\big)\sim\exp(\lambda\ln x)=x^\lambda$ donc $f_n'(x)\sim\lambda x^{\lambda-1}$ tend vers 0 si et seulement si $\lambda-1=n-3/2>0$ soit si et seulement si $n\geqslant 2$.

Ainsi f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $n\geqslant 2$. CQFD.

b. On a vu que $\mu_n=\varphi(n-1/2)$ c'est à dire que μ_n est caractérisé par $h(\mu_n)=n-1/2$ avec $h(x)=x\ln x$ strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

Ainsi $h(\mu_1)=1/2$ et $h(\mu_2)=3/2$. Or $h(1)=0$ et $h(2)=2\ln 2\in]1/2,3/2[$ donc $1<\mu_1<2<\mu_2$. CQFD.

- De même pour établir que $\sqrt{n}<\mu_n<n$ pour $n\geqslant 3$, il suffit de prouver que $\dfrac{1}{2}\sqrt{n}\ln n<n-\dfrac{1}{2}<n\ln n$ (1).

  Soit $\Delta(x)=x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{x}\ln x$. Il vient que $\Delta'(x)$ est du signe de $4\sqrt{x}-\ln x-2$ dont le minimum est atteint en $1/4$ et vaut $\ln 4>0$ par une étude immédiate. Donc Δ croît et comme $\Delta(1)=1/2>0$ il vient que l'inégalité de gauche de (1) est vraie pour tout $n\geqslant 1$.

  Soit désormais $\delta(x)=x\ln x-x+1/2$. Comme $\delta'(x)=\ln x$, δ croît sur $[1,+\infty[$. Or $\delta(3)=3\ln 3-5/2>0$ car $\ln 3>5/6$ puisque $3>e$. Ce qui établit l'inégalité de droite de (1) pour $n\geqslant 3$. CQFD.

- De $\mu_n\ln\mu_n=n-1/2$ on tire $\dfrac{\mu_n}{n}=\dfrac{1-1/2n}{\ln\mu_n}\sim\dfrac{1}{\ln\mu_n}$ tend vers 0 car $\mu_n\geqslant\sqrt{n}$. Ainsi $\mu_n=o(n)$. CQFD.

- Nous avons $\mu_n\sim\dfrac{n}{\ln\mu_n}$ donc pour n assez grand $\mu_n\geqslant\dfrac{n}{2\ln\mu_n}$. Or $\ln\mu_n\leqslant\ln n$ puisque $\mu_n<n$. Donc $\mu_n\geqslant\dfrac{n}{2\ln n}$ pour n assez grand donc $n^\alpha=o(\mu_n)$ pour tout réel $\alpha\in]0,1[$. CQFD.

III.1. Propriétés de la fonction g_n.

a. Vérification immédiate à partir de la définition de g_n.

b. En II.2.a. est indiquée l'allure du graphe de f_n. Il en découle celui de g_n : fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty,\sqrt{n}]$, croissante sur $[\sqrt{n},0]$ puis décroissante vers 0 sur $]0,+\infty[$. La maximum atteint en 0 a pour valeur 1.

c. D'après la relation admise en II.1. dans l'énoncé avec $\lambda=n-1/2$ et compte tenu de $f_n(x)=\exp\big(\phi_{n-1/2}(x)\big)$ pour $x>0$, il vient que :

$g_n(x)=\exp\Big(\big(\mu_n-(n-1/2)\big)\big(\dfrac{x}{\sqrt{n}}-\ln(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}})\big)-\mu_n\dfrac{x}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}})\Big)$ pour $x>-\sqrt{n}$ et $g_n(x)=0$ sinon. (2).

Fixons $x\in\mathbb{R}$. Pour n assez grand, $x>-\sqrt{n}$ et donc $g_n(x)$ admet la première expression ci-dessus.

Or $\mu_n=o(n)$ donc $\mu_n-(n-1/2)\sim -n$ et $\dfrac{x}{\sqrt{n}}-\ln(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}})\sim-\dfrac{x^2}{2n}$.

Il en découle que $\big(\mu_n-(n-1/2)\big)\big(\dfrac{x}{\sqrt{n}}-\ln(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}})\big)$ tend vers $-\dfrac{x^2}{2}$.

Par ailleurs $\mu_n\dfrac{x}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}})\sim\dfrac{\mu_n}{n}x^2$ tend vers 0 car $\mu_n=o(n)$.

Ainsi la suite (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g définie par $g(x)=\exp(-\dfrac{x^2}{2})$. CQFD.

d. Fixons $x>-\sqrt{n}$. On remarque que, x positif ou négatif, on a toujours $\mu_n\dfrac{x}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}})\geqslant 0$ et partant, d'après (2) ci-dessus, $g_n(x)\leqslant\exp\Big(\big(\mu_n-(n-1/2)\big)\big(\dfrac{x}{\sqrt{n}}-\ln(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}})\big)\Big)$ et cela pour tout entier n et tout réel $x>-\sqrt{n}$.

Or $\mu_n=o(n)$ donc, pour n assez grand, $\mu_n-(n-1/2)\leqslant-\dfrac{n}{2}$.

Il en découle qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n\geqslant n_0$ on ait $g_n(x)\leqslant\exp\Big(-\dfrac{n}{2}\big(\dfrac{x}{\sqrt{n}}-\ln(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}})\big)\Big)$ pour tout réel $x>-\sqrt{n}$. CQFD.

III.2. Une majoration de la fonction g_n.

a. u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ et au voisinage de 0, $u(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{3}+O(x^2)$ ce qui prouve que u est dérivable en 0 de nombre dérivé $-\dfrac{1}{3}$.

Il vient que, pour $x \neq 0$, $u'(x) = \dfrac{v(x)}{x^3}$ avec $v(x) = -\dfrac{x^2+2x}{1+x} + 2\ln(1+x)$. Or $v'(x) = -\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$ donc v décroît sur $]-1,+\infty[$. Or $v(0)=0$ donc $v(x)>0$ pour $x<0$ et $v(x)>0$ pour $x>0$. Il en découle que $u'(x)<0$ pour tout $x>-1$, $x\neq 0$. (Et également en 0 puisque $u'(0) = -1/3$).

En conclusion u est décroissante et positive car $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$. CQFD.

b. Soit $n \geqslant n_0$ fixé quelconque, n_0 entier introduit précédemment.

Pour tout $x > -\sqrt{n}$ on a $g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\dfrac{n}{2}\big(\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}})\big)\Big) = \exp\Big(-\dfrac{x^2}{2}u(\dfrac{x}{\sqrt{n}})\Big)$ d'après la question III.1.d.

- Si $x \in]-\sqrt{n}, 0]$ il vient que $u(\dfrac{x}{\sqrt{n}}) \geqslant u(0) = \dfrac{1}{2}$ puisque u décroît donc $g_n(x) \leqslant \exp(-\dfrac{x^2}{4})$.

  Cette majoration est encore vraie si $x \leqslant -\sqrt{n}$ puisqu'alors $g_n(x) = 0$.

  En conclusion $g_n(x) \leqslant \exp(-\dfrac{x^2}{4})$ pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \leqslant 0$. CQFD.

- Si $x \geqslant 0$ il vient $u(\dfrac{x}{\sqrt{n}}) \geqslant u(x)$ puisque u décroît. Il en découle $g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\dfrac{x^2}{2}u(x)\Big)$.

  En d'autres termes $g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\dfrac{1}{2}\big(x - \ln(1+x)\big)\Big) = \sqrt{1+x}\ \exp\big(-\dfrac{x}{2}\big)$ pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \geqslant 0$. CQFD.

IV.1. Intégrabilité de la fonction g_n.

- Soit $n \geqslant 1$ fixé quelconque. f_n est continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Elle est intégrable en $-\infty$ puisque nulle pour $x \leqslant 0$. En outre $x^2 f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc f_n est intégrable en $+\infty$ et finalement f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.

  Le $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme $x \longrightarrow \mu_n\big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\big)$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ prouve alors, d'après la définition de g_n donnée au début de la troisième partie, que g_n est intégrable sur $\mathbb{R}$. CQFD.

- Notons ℓ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\ell(x) = \exp(-\dfrac{x^2}{4})$ pour $x \leqslant 0$ et $\ell(x) = \sqrt{1+x}\ \exp\big(-\dfrac{x}{2}\big)$ sinon.

  ℓ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\ell(x) = o\big(\dfrac{1}{x^2}\big)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$. Par ailleurs ℓ domine la suite (g_n) sur $\mathbb{R}$ d'après la question III.2.b.

  Ainsi la suite (g_n) est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction continue g et qui est dominée sur $\mathbb{R}$ par la fonction ℓ intégrable. D'après le théorème de la convergence dominée, la suite $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \exp\big(-\dfrac{x^2}{2}\big) = \sqrt{2\pi}$ (intégrale de Gauss). CQFD.

IV.2. Un encadrement de la somme S_n.

Sur $[0,+\infty[$ la fonction positive f_n croît entre 0 et μ_n puis décroît. Il en découle classiquement que :

$\displaystyle\int_0^p f_n \leqslant \sum_{k=1}^{p} f_n(k) \leqslant f_n(p) + \int_0^p f_n$ et $\displaystyle\int_{p+1}^{+\infty} f_n \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} f_n(k) \leqslant f_n(p+1) + \int_{p+1}^{+\infty} f_n$.

Donc par addition, vu que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} f_n$, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n - \int_p^{p+1} f_n \leqslant S_n \leqslant f_n(p) + f_n(p+1) + \int_{\mathbb{R}} f_n - \int_p^{p+1} f_n \leqslant f_n(p) + f_n(p+1) + \int_{\mathbb{R}} f_n \quad (3).$$

Or $f_n(x) = f_n(\mu_n) g_n\Big(\dfrac{\sqrt{n}}{\mu_n}x - \sqrt{n}\Big)$ d'après la question III.1.a. de sorte que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n = f_n(\mu_n)\frac{\mu_n}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{R}} g_n$.

Par ailleurs $\displaystyle\int_p^{p+1} f_n \leqslant f_n(\mu_n)$ ainsi que $f_n(p) \leqslant f_n(\mu_n)$ et $f_n(p+1) \leqslant f_n(\mu_n)$ puisque $f_n(\mu_n)$ est le maximum de la fonction f_n.

Il découle alors de (3) que $f_n(\mu_n)\dfrac{\mu_n}{\sqrt{n}}I_n - f_n(\mu_n) \leqslant S_n \leqslant f_n(\mu_n)\dfrac{\mu_n}{\sqrt{n}}I_n + 2f_n(\mu_n)$ (4).

Posons $K_n = f_n(\mu_n)\dfrac{\mu_n}{\sqrt{n}}$ et $\varepsilon_n = 2\dfrac{\sqrt{n}}{\mu_n}$ qui tend bien vers 0 d'après la question II.2.b.iii.

L'inégalité (4) ci-dessus permet alors d'écrire $K_n(I_n - \varepsilon_n) \leqslant S_n \leqslant K_n(I_n + \varepsilon_n)$. CQFD.

IV.3. Un équivalent du réel B_n.

D'après les questions I.1.c. et I.3.b. on a $B_n \sim \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}S_n$.

Or $S_n \sim \sqrt{2\pi}K_n$ d'après la question précédente et le fait que I_n tend vers $\sqrt{2\pi}$ (question IV.1.).

Ainsi $B_n \sim \dfrac{1}{e}K_n$. CQFD.

FIN