

Mines MP2 2018
Un corrigé

1 Quelques exemples

1. Pour tout réel θ , on a

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}^2 = I_2$$

Comme \cos (et \sin) prennent une infinité de valeurs, I_2 admet une infinité de racines carrées. Par ailleurs, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(I_2) = P(1)I_2$ qui est une racine carrée de I_2 si et seulement si $P(1)^2 = 1$ i.e. $P(1) \in \{1, -1\}$. Ainsi,

Les seuls polynômes en I_2 qui sont des racines carrées de I_2 sont I_2 et $-I_2$

2. On vérifie que

$$\forall a \in \mathbb{C}^*, \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = A$$

et A possède donc une infinité de racines carrées.

Comme $A^2 = 0$, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A) \in \text{Vect}(I_3, A)$ et s'écrit donc $P(A) = \alpha I_3 + \beta A$. On a alors

$$P(A)^2 = \alpha^2 I_3 + 2\alpha\beta A$$

Si, par l'absurde, $P(A)^2 = A$ alors (comme (I_3, A) est libre) $\alpha^2 = 0$ et $2\alpha\beta = 1$ ce qui est impossible ($\alpha = 0$ entraîne $\alpha\beta = 0$).

Aucune racine carrée de A n'est un polynôme en A

3. Comme A est symétrique réelle, le théorème spectral nous indique qu'elle est orthodiagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

les λ_i étant les valeurs propres de A , supposées ici positives.

- Existence : posons

$$B = P\Delta P^{-1} \text{ avec } \Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$

Comme P est orthogonale ($P^{-1} = P^T$), B est symétrique. Ses valeurs propres sont les $\sqrt{\lambda_i} > 0$. B est donc définie positive. Enfin,

$$B^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$$

et B est une racine carrée de A .

- Unicité : soit B symétrique définie positive telle que $B^2 = A$. Comme B et A commutent, tout sous-espace propre pour A est stable par l'endomorphisme b canoniquement associé à B . Si λ est valeur propre de A , b induit sur $E_\lambda(A)$ un endomorphisme b_λ .

Comme b est diagonalisable, b_λ l'est aussi. Si μ est valeur propre de b_λ et x un vecteur propre associé, alors $\mu^2 x = b_\lambda^2(x) = a(x) = \lambda x$ (on note a l'endomorphisme canoniquement associé à A et on a $a(x) = \lambda x$ car $x \in E_\lambda(A)$ puisque x est vecteur propre pour b_λ défini sur cet espace). Ainsi $\mu^2 = \lambda$ et comme les valeurs propres de b (et donc celle de b_λ) sont positives, $\mu = \sqrt{\lambda}$.

On vient de voir que b agit comme $\sqrt{\lambda}$ sur $E_\lambda(A)$. Comme A est diagonalisable, ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans \mathbb{R}^n et b est donc parfaitement définie. B est donc unique.

Avec des notations classiques ($\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives).

$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ admet une unique racine carrée dans } \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

2 Existence et calcul d'une racine carrée

4. U^2 et T étant triangulaires, elles sont égales si et seulement si elles ont même triangle supérieur. La condition d'égalité des termes diagonaux donne

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, u_{i,i}^2 = t_{i,i}$$

Pour $j > i$, on a ($u_{k,j} = 0$ si $k > j$ et $u_{i,k} = 0$ si $i > k$)

$$(U^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^n u_{i,k} u_{k,j} = \sum_{k=i}^j u_{i,k} u_{k,j} = u_{i,i} u_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k} u_{k,j} + u_{i,j} u_{j,j}$$

La condition d'égalité du terme d'indice (i, j) avec $j > i$ est donc

$$(u_{i,i} + u_{j,j}) u_{i,j} = t_{i,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k} u_{k,j} \quad (*)$$

$$U^2 = T \iff \begin{cases} u_{i,i}^2 = t_{i,i} & (1 \leq i \leq n) \\ (u_{i,i} + u_{j,j}) u_{i,j} = t_{i,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k} u_{k,j} & (1 \leq i < j \leq n) \end{cases}$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. z admet deux racines carrées opposées que l'on écrit $a + ib$ et $-a - ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ nous tous deux nuls. En choisissant la bonne racine, on peut alors affirmer que z possède une racine qui est soit de partie réelle > 0 soit de partie réelle nulle et de partie imaginaire > 0 .

Ici, tous les $t_{i,i}$ sont non nuls car T est inversible et admettent donc une racine carrée $u_{i,i}$ ayant la propriété précédente. Grâce à cette propriété, $\forall i, j, u_{i,j} + u_{j,j} \neq 0$ (soit la partie réelle est > 0 , soit elle est nulle et alors c'est la partie imaginaire qui est > 0).

En faisant ce choix pour les $u_{i,i}$, les formules (*) pour $j = i + 1$ permettent d'obtenir $u_{i,i+1}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n - 1\}$.

Les formules (*) pour $j = i + 2$ permettent alors d'obtenir $u_{i,i+2}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n - 2\}$ (les $u_{x,y}$ du membre de droite ont déjà été définis).

On peut ainsi, par récurrence, obtenir les $u_{i,j}$ pour $j - i = 1, 2, \dots, n - 1$ et obtenir une solution au système.

Une matrice triangulaire supérieure inversible admet une racine carrée

5. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est trigonalisable. Il existe donc P inversible telle que $P^{-1}AP = T$ est triangulaire. T est aussi inversible (semblable à A) et admet une racine carrée U . PUP^{-1} est alors une racine carrée de A .

Toute matrice inversible admet une racine carrée

Les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de T . Si les $t_{i,i}$ sont dans $\tilde{\mathbb{C}}$ alors une racine carrée de $t_{i,i}$ n'est pas imaginaire pure. Ainsi, le choix fait ci-dessus des $u_{i,i}$ donne une racine carrée U de t dont les valeurs propres (les $u_{i,i}$) sont de partie réelle > 0 . Ces valeurs propres sont aussi celles de PUP^{-1} (deux matrices semblables ont même spectre). Ainsi,

Si $\text{Sp}(A) \subset \tilde{\mathbb{C}}$ alors A admet une racine carrée à valeurs propres de partie réelle > 0

3 Algorithme de Newton

6. On a

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right|^2$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n pour obtenir

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \cdot |b_{k,j}| \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2$$

Les deux combinés (avec l'inégalité triangulaire) donnent

$$\|AB\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2 \right) = \|A\|^2 \|B\|^2$$

Le passage à la racine carrée étant croissant,

$$\boxed{\|AB\| \leq \|A\| \|B\|}$$

7. Comme on est dans \mathbb{C} , le polynôme minimal de A s'écrit

$$m_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$$

On a donc

$$m_A(B) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (B - \lambda I_n)^{\alpha_\lambda}$$

Cette matrice est inversible si et seulement si tous ces facteurs le sont (le voir, par exemple, en passant au déterminant) c'est à dire si aucune valeur propre de A n'est valeur propre de B ($B - xI_n$ étant inversible ssi x n'est pas valeur propre de B). Ceci s'écrit

$$\boxed{m_A(B) \text{ est inversible si et seulement si } A \text{ et } B \text{ n'ont aucune valeur propre commune}}$$

Supposons qu'il existe M non nulle telle que $AM = MB$. Montrons tout d'abord, par récurrence, que

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p M = M B^p$$

- Initialisation : c'est immédiat si $p = 0$.
- Hérédité : supposons le résultat vrai au rang p . On a alors

$$A^{p+1} M = A A^p M = A M B^p = M B B^p = M B^{p+1}$$

ce qui donne le résultat au rang $p + 1$

Par combinaisons linéaires, on en déduit que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)M = M P(B)$$

En prenant $P = m_A$, on en déduit que $M m_A(B) = 0$. Comme $M \neq 0$, $m_A(B)$ est non inversible et A et B ont une valeur propre en commun.

$$\boxed{(\exists M \neq 0 / AM = MB) \Rightarrow \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) \neq \emptyset}$$

8. A et B ont une valeur propre commune λ , il en est donc de même de A et B^T (une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique et donc même spectre).

On peut donc X un vecteur propre pour A et Y un vecteur propre pour B^T associés à λ . On a alors $M = XY^T$ qui vérifie $AM = MB = \lambda M$. De plus, M est non nulle (il existe i et j tels que $x_i \neq 0$ et $y_j \neq 0$ et alors $M_{i,j} = x_i y_j \neq 0$).

$$\boxed{(\exists M \neq 0 / AM = MB) \iff \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) \neq \emptyset}$$

9. On a

$$F(X + H) - F(X) = (X + H)^2 - X^2 = HX + XH + H^2$$

$H \mapsto HX + XH$ est linéaire et $\|H^2\| \leq \|H\|^2 = o(\|H\|)$. Par définition de la différentielle en X , on a donc

$$\boxed{\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), dF_X(H) = XH + XH}$$

Supposons dF_X inversible. Alors $XH + XH = 0$ implique $H = 0$ (caractère injectif de l'endomorphisme dF_X). $XM = M(-X)$ n'admet alors pas de solution non nulle donc X et $-X$ n'ont pas de valeur propre en commun. Les valeurs propres de $-X$ étant les opposées de celles de X , il n'existe aucun complexe z tel que z et $-z$ soient valeurs propres de X .

Réciproquement, si cette condition a lieu alors $XH + XH = 0$ implique $H = 0$ et dF_X est injectif et donc inversible (endomorphisme injectif en dimension finie).

$$\boxed{dF_X \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \text{ ssi il n'existe aucun complexe } z \text{ tel que } z \text{ et } -z \text{ soient valeurs propres de } X}$$

Cette condition implique l'inversibilité de X car sinon 0 et -0 sont valeurs propres de X .

10. Par définition $X^* = \sqrt{A}$ a des valeurs propres qui sont toutes de partie réelle > 0 . Il n'y a donc pas de valeur propre z telle que $-z$ soit aussi valeur propre et $\boxed{dF_{X^*} \text{ est inversible}}$.

F étant de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (théorèmes d'opérations) l'application $X \mapsto dF_X$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. L'image réciproque de l'ouvert $GL_n(\mathbb{C})$ par cette application est donc un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cet ouvert contient X^* et donc aussi une boule centrée sur X^* . Ainsi

$$\boxed{\exists r > 0 / \forall X \in \overline{B}(X^*, r), dF_X \in GL_n(\mathbb{C})}$$

11. Par définition de X^* , $F(X^*) = (X^*)^2 - A = A - A = 0$. Ainsi

$$G(X^*) = X^* - (dF_{X^*})^{-1}(F(X^*)) = X^*$$

puisque $(dF_{X^*})^{-1}$ est linéaire et envoie 0 sur 0 : $\boxed{G(X^*) = X^*}$.

On a de même (en notant que $F(X^* + H) = (X^* + H)^2 - A = X^*H + XH^* + H^2$)

$$G(X^* + H) = X^* + H - (dF_{X^*+H})^{-1}(F(X^* + H)) = X^* + H - (dF_{X^*+H})^{-1}(X^*H + XH^* + H^2)$$

et en faisant la différence

$$G(X^* + H) - G(X^*) = H - (dF_{X^*+H})^{-1}(X^*H + XH^* + H^2)$$

Remarquons que

$$dF_{X^*+H}(H) = (X^* + H)H + H(X^* + H) = X^*H + XH^* + 2H^2$$

On a donc

$$G(X^* + H) - G(X^*) = H - (dF_{X^*+H})^{-1}(dF_{X^*+H}(H) - H^2)$$

Par linéarité de $(dF_{X^*+H})^{-1}$, on a ainsi

$$G(X^* + H) - G(X^*) = H - (dF_{X^*+H})^{-1}(dF_{X^*+H}(H)) + (dF_{X^*+H})^{-1}(H^2)$$

Comme $(dF_{X^*+H})^{-1}(dF_{X^*+H}(H)) = (dF_{X^*+H})^{-1} \circ dF_{X^*+H}(H) = H$, on conclut que

$$\boxed{G(X^* + H) - G(X^*) = (dF_{X^*+H})^{-1}(H^2)}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} dF_{X^*+H}(M) &= (X^* + H)M + M(X^* + H) \\ dF_{X^*} \circ (Id + (dF_{X^*})^{-1} \circ dF_H)(M) &= dF_{X^*}(M + (dF_{X^*})^{-1}(MH + HM)) \\ &= dF_{X^*}(M) + dF_{X^*} \circ (dF_{X^*})^{-1}(MH + HM) \\ &= X^*M + MX^* + MH + HM \end{aligned}$$

Ainsi

$$dF_{X^*+H} = dF_{X^*} \circ (Id + (dF_{X^*})^{-1} \circ dF_H)$$

Il reste à passer à l'inverse pour conclure que

$$\boxed{(dF_{X^*+H})^{-1} = (Id + (dF_{X^*})^{-1} \circ dF_H)^{-1} \circ (dF_{X^*})^{-1}}$$

12. On va conclure en utilisant la notion de norme subordonnée (qui n'est pas au programme).

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de dimension finie (disons p) que l'on munit d'une base. On peut alors identifier $\mathcal{L}(E)$ à $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et donc munir $\mathcal{L}(E)$ de la norme $\|\cdot\|$ du début de la partie (notée comme la norme sur E , mais ce n'est pas la même). On montre alors comme en question 6 que

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\| \quad (*)$$

Ici, l'espace considéré est $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (muni de $\|\cdot\|$ du début de la partie par exemple). On munit l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ de la norme, notée $\|\cdot\|$, définie ci-dessus.

F étant de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et le passage à l'inverse étant continu sur $GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $X \mapsto (dF_X)^{-1}$ est continue sur $\overline{B}(X^*, r)$. Cette boule fermée étant un compact, l'application est bornée sur ce compact et

$$\exists C / \forall X \in \overline{B}(X^*, r), \|(dF_X)^{-1}\| \leq C$$

On en déduit, avec la propriété (*) et la question précédente, que

$$\forall H \in B(0, r), \|G(X^* + H) - G(X^*)\| \leq \|(dF_{X^*+H})^{-1}\| \cdot \|H^2\| \leq C\|H^2\|$$

La question 6 donne $\|H^2\| \leq \|H\|^2$ et ce que l'on a montré donne donc

$$\boxed{\exists C > 0 / \forall X \in B(X^*, r), \|G(X) - X^*\| \leq C\|X - X^*\|^2}$$

13. Pour $k = 0$, l'inégalité à prouver est $\|X_k - X^*\| \leq \frac{\rho}{\sqrt{C}}$ sous la seule hypothèse $\|X^* - X_0\| < \rho$.

Cela me semble impossible. Je vais donc prouver un résultat légèrement différent.

On choisit $\rho = \min(r, 1/C, r/C)$ et on suppose que $X_0 \in B(X^*, \rho)$. Montrons par récurrence sur $k \geq 0$ que X_k est bien défini et qu'on a la majoration

$$\|X_k - X^*\| \leq \frac{(\rho C)^{2^k}}{C}$$

- Initialisation : X_0 est bien défini et $\|X_0 - X^*\| \leq \rho = \frac{\rho C}{C}$. Le résultat est vrai au rang 0.
- Hérédité : on suppose le résultat vrai à un rang k . On a alors $\|X_k - X^*\| \leq \frac{(\rho C)^{2^k}}{C}$. Comme $\rho C \leq 1$, $(\rho C)^{2^k} \leq \rho C$ (car $2^k \geq 1$) et donc

$$\|X_k - X^*\| \leq \rho C \leq r$$

Comme $X_k \in \overline{B}(X^*, r)$, dF_{X_k} est inversible et X_{k+1} existe bien. De plus

$$\|X_{k+1} - X^*\| = \|G(X_k) - G(X^*)\| \leq C\|X_k - X^*\|^2 \leq C \left(\frac{(\rho C)^{2^k}}{C} \right)^2 = \frac{(\rho C)^{2^{k+1}}}{C}$$

ce qui prouve le résultat au rang $k + 1$.

On peut en fait réduire la constante ρ autant que l'on veut. Cela signifie que

$$\boxed{\text{Pourvu que } X_0 \text{ soit assez proche de } X^*, (X_k) \text{ converge vers } X^*}$$

4 Forme équivalente

14. On suppose (X_k) bien définie. En particulier, dF_{X_k} est inversible pour tout k . Montrons par récurrence sur k que U_k est bien défini et que $U_k = X_k$.

- Initialisation : le résultat est immédiat pour $k = 0$.
- Hérédité : supposons le résultat vrai au rang k . Comme $X_k = U_k$, dF_{U_k} est inversible et il existe une unique matrice H_k telle que $U_k H_k + H_k U_k = A - U_k^2$ et c'est

$$H_k = (dF_{X_k})^{-1}(A - X_k^2) = (dF_{X_k})^{-1}(-F(X_k)) = -(dF_{X_k})^{-1}(F(X_k))$$

Ainsi U_{k+1} est bien défini et vaut X_{k+1} .

Réciproquement, on suppose (U_k) bien définie et on pose $X_0 = U_0$. Montrons par récurrence sur k que X_k est bien défini et que $X_k = U_k$

- Initialisation : le résultat est immédiat pour $k = 0$.
- Hérédité : supposons le résultat vrai au rang k . Comme U_{k+1} est bien définie, $U_k M + M U_k = A - U_k^2$ admet une unique solution c'est à dire que $dF_{X_k}(M) = A - X_k^2$ admet une unique solution.

Soit φ un endomorphisme d'un espace E de dimension finie. Pour $a \in E$, l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(x) = a$ (d'inconnue $x \in E$) est soit vide soit un espace affine dirigé par le noyau de φ . S'il existe un a pour lequel l'ensemble des solutions est un singleton, c'est donc que φ est injective (noyau de dimension 0) et, par dimension, φ est inversible.

Ici, on en conclut que dF_{X_k} est inversible et que X_{k+1} est bien défini. Le même calcul que plus haut montre que $X_{k+1} = U_{k+1}$.

Si $X_0 = U_0$, (U_k) et (X_k) sont simultanément bien définies et égale dans ce cas

15. On procède encore par récurrence pour montrer que pour tout entier k , V_k est bien définie et que $U_k = V_k$ commute avec A .

- Initialisation : le résultat est immédiat pour $k = 0$.
- Hérédité : supposons le résultat vrai à un rang k . Avec la question précédente (et comme on suppose les condition vérifiées), $dF_{U_k} = dF_{X_k}$ est inversible et la question 9 indique que $V_k = U_k$ est inversible. V_{k+1} est donc bien définie.

Posons $G_k = \frac{1}{2}(U_k^{-1}A - U_k)$. On a

$$\begin{aligned} U_k G_k + G_k U_k &= \frac{1}{2}U_k(U_k^{-1}A - U_k) + \frac{1}{2}(U_k^{-1}A - U_k)U_k \\ &= \frac{1}{2}(A + U_k^{-1}AU_k) - U_k^2 \\ &= A - U_k^2 \quad \text{car } AU_k = U_k A \end{aligned}$$

Ainsi, $U_{k+1} = U_k + G_k = V_k + \frac{1}{2}(V_k^{-1}A - V_k) = V_{k+1}$. De plus, comme V_k et A commutent, il en est de même de V_k^{-1} et A et donc de V_{k+1} et A .

16. Prouvons par récurrence que e_1, \dots, e_n sont propres pour V_k et en notant $\lambda_{k,i}$ les valeurs propres correspondantes, que $\lambda_{k,i} > 0$ pour tout i . Remarquons que l'hypothèse au rang k donnera le caractère défini positif de V_k puisque V_k sera diagonalisable en b.o.n. (on peut choisir ainsi les e_i) à valeurs propres > 0 . En particulier aussi, V_k sera inversible.

- Initialisation : le résultat est vrai pour $k = 0$ et $\lambda_{0,i} = \mu$
- Hérédité : supposons le résultat vrai pour un rang k . On a alors

$$V_{k+1}e_i = \frac{1}{2}(V_k e_i + V_k^{-1}A e_i) = \frac{1}{2}(\lambda_{k,i} e_i + \lambda_i V_k^{-1} e_i)$$

Comme $V_k e_i = \lambda_{k,i} e_i$ et V_k inversible, on a $V_k^{-1} e_i \frac{1}{\lambda_{k,i}} e_i$. Finalement,

$$V_{k+1} e_i = \frac{1}{2} \left(\lambda_{k,i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_{k,i}} \right) e_i$$

Comme les $\frac{1}{2} \left(\lambda_{k,i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_{k,i}} \right)$ sont positifs, on a le résultat au rang $k + 1$.

$$\boxed{V_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall k, \lambda_{k+1,\ell} = \frac{1}{2} \left(\lambda_{k,\ell} + \frac{\lambda_\ell}{\lambda_{k,\ell}} \right)}$$

17. On prouve le résultat par récurrence sur k .

- Initialisation : On a

$$\lambda_{1,\ell} = \frac{1}{2} \left(\lambda_{0,\ell} + \frac{\lambda_\ell}{\lambda_{0,\ell}} \right) = \frac{1}{2} \left(\mu + \frac{\lambda_\ell}{\mu} \right)$$

Le calcul donne alors (même calcul que dans l'hérédité)

$$\frac{\lambda_{1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}} \right)^2$$

ce qui donne le résultat au rang 0.

- Hérédité : on suppose le résultat vrai jusqu'à un rang $k - 1 \geq 0$. On a (avec les formules de la question 16)

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell} &= \frac{1}{2\lambda_{k,\ell}} \left(\lambda_{k,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell} \right)^2 \\ \lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell} &= \frac{1}{2\lambda_{k,\ell}} \left(\lambda_{k,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell} \right)^2 \end{aligned}$$

Le quotient donne le carré de la quantité au rang $k - 1$ ce qui permet d'obtenir le résultat au rang k .

$$\boxed{\frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}} \right)^{2^{k+1}}}$$

18. Comme V_k a les mêmes vecteurs propres que A , elle est diagonalisable via la même matrice de passage :

$$V_k = P \text{diag}(\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,n}) P^T$$

Comme μ et les λ_ℓ sont > 0 , on a $0 \leq \mu - \sqrt{\lambda_\ell} < \mu + \sqrt{\lambda_\ell}$ et la question précédente donne

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = 0$$

En notant $u_k = \frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}}$, on a

$$\lambda_{k+1,\ell}(u_k - 1) = \sqrt{\lambda_\ell}(-u_k - 1)$$

Comme $u_k \rightarrow 0$, on conclut que $\lambda_{k+1,\ell} \rightarrow \sqrt{\lambda_\ell}$. Ainsi, la suite de terme général $\text{diag}(\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,n})$ est convergente de limite $\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Par continuité de $M \mapsto P M M^T$,

$$\boxed{(V_k) \text{ converge vers l'unique racine carrée définie positive de } A}$$

5 Stabilité

19. Notons que les colonnes de P sont les vecteurs propres e_i . En particulier, on a

$$V_0 C_j = \sqrt{\lambda_j} C_j$$

et donc aussi

$$V_0^{-1} C_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} C_j$$

et comme V_0 est symétrique, on obtient en transposant

$$C_j^T V_0 = \sqrt{\lambda_j} C_j^T \quad \text{et} \quad C_j^T V_0^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} C_j^T$$

On en déduit en particulier que

$$\Delta V_0^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \Delta \quad \text{et} \quad V_0^{-1} \Delta = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \Delta$$

On en déduit aussi que

$$\Delta V_0^{-1} \Delta V_0^{-1} = \frac{1}{\lambda_j} \Delta^2 = \frac{1}{\lambda_j} C_i \underbrace{C_j^T C_i}_{=0} C_j^T$$

la nullité étant due au fait que les colonnes de P forment une base orthonormée.

On forme alors le produit

$$(V_0 + \Delta)(V_0^{-1} - V_0^{-1} \Delta V_0^{-1}) = I_n - \Delta V_0^{-1} \Delta V_0^{-1} = I_n$$

et on en déduit que $V_0 + \Delta$ est inversible avec

$$\boxed{(V_0 + \Delta)^{-1} = V_0^{-1} - V_0^{-1} \Delta V_0^{-1}}$$

On en déduit que

$$\widehat{V}_1 = \frac{1}{2}(V_0 + \Delta + (V_0^{-1} - V_0^{-1} \Delta V_0^{-1})A)$$

et on a aussi

$$V_1 = \frac{1}{2}(V_0 + V_0^{-1}A)$$

En formant la différence, on en déduit que

$$\boxed{\Delta_1 = \frac{1}{2}(\Delta - V_0^{-1} \Delta V_0^{-1} A)}$$

20. Supposons que $\widehat{V}_k = \sqrt{A} + \eta^k \Delta$. Comme ci-dessus (en remplaçant ε par $\varepsilon \eta^k$) on a (rappelons que $V_0 = \sqrt{A}$)

$$\widehat{V}_k^{-1} = V_0^{-1} - V_0^{-1} \eta^k \Delta V_0^{-1}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \widehat{V}_{k+1} &= \frac{1}{2}(\widehat{V}_k + \widehat{V}_k^{-1} A) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{A} + \eta^k \Delta + V_0^{-1} A - \eta^k V_0^{-1} \Delta V_0^{-1} A) \end{aligned}$$

On vérifie que $V_0^{-1}A = \sqrt{A}$ avec l'expression obtenue en question 3 de la racine carrée d'une symétrique définie positive. On utilise aussi les remarques du début de question 19 pour obtenir

$$\eta^k \Delta - \eta^k V_0^{-1} \Delta V_0^{-1} A = \eta^k \Delta - \eta^k V_0^{-1} \Delta V_0 = \eta^k \left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} \right) \Delta$$

On en déduit que

$$\widehat{V}_{k+1} = \sqrt{A} + \frac{\eta^k}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} \right) \Delta$$

On va ainsi pouvoir prouver par récurrence que

$$\boxed{\widehat{V}_k = \sqrt{A} + \eta^k \Delta \text{ avec } \eta = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} \right)}$$

21. Pour que (\widehat{V}_k) converge, il faut et suffit que $\eta \in] -1, 1]$ c'est à dire que $\frac{\lambda_j}{\lambda_i} < 9$ (ce quotient est positif).

$\boxed{\text{Il suffit que le conditionnement soit strictement inférieur à 9}}$