RÉSEAU CPGE IBNGHAZI
MP* 1 (Rabat)

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Devoir Maison
Intégrales à Paramètres

(Mines 2024)

Généralisation d'une intégrale de Dirichlet et application

Le but de ce sujet est de calculer l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos(t)\right)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et d'utiliser ce calcul pour évaluer une espérance.

Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0;1[$ fixé.

1 ▷ Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi\,;\pi[$, la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f\ :]0\,;+\infty[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}} \end{aligned}$$

est définie et intégrable sur $]0;+\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$\begin{aligned} r\ :]-\pi\,;\pi[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ \theta &\longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

2 ▷ Montrer que la fonction r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi\,;\pi[$ et que :

$$\forall \theta \in]-\pi;\pi[, \quad r'(\theta) = -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{\mathrm{i}\theta})^2}\,\mathrm{d}t.$$

Indication : soit $\beta \in]0;\pi[$, montrer que pour tout $\theta \in [-\beta;\beta]$ et $t \in [0,+\infty[$, $|1+te^{i\theta}|^2 \geq |1+te^{i\beta}|^2 = (t+\cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2$.

Soit g la fonction définie par

$$\begin{aligned} g\ :]-\pi;\pi[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ \theta &\longmapsto e^{\mathrm{i}x\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

3 $\triangleright$ Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[$ et que pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$,

$$g'(\theta) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x\theta} \int_0^{+\infty} h'(t)\ \mathrm{d}t,$$

où h est la fonction définie par

$$h\ :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbf{C}$$
$$t \longmapsto \frac{t^x}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}.$$

Calculer $h(0)$ et

$$\lim_{t\to+\infty} h(t).$$

En déduire que la fonction g est constante sur $]-\pi;\pi[$.

4 $\triangleright$ Montrer que pour tout $\theta \in]0;\pi[$,

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(g(-\theta)e^{\mathrm{i}x\theta} - g(\theta)e^{-\mathrm{i}x\theta}\Big) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\ \mathrm{d}t.$$

5 $\triangleright$ En déduire que :

$$\forall \theta \in]0;\pi[, \quad g(\theta)\sin(\theta x) = \int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{\Big(u\sin(\theta)-\cos(\theta)\Big)^x}{1+u^2}\ \mathrm{d}u,$$

où $\mathrm{cotan}(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

6 $\triangleright$ Montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

7 $\triangleright$ En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0;1[$ fixé.

8 $\triangleright$ Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\ \mathrm{d}t.$$

9 ▷ Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}\cdot$$

10 ▷ Établir l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}\cdot$$

11 ▷ En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}\cdot$$

12 ▷ En déduire enfin que :

$$\forall y \in]0\,;\pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y\sin(y)}{y^2-n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}\cdot$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13 ▷ Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

14 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \big(\cos(t)\big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^{2p}\,\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t.$$

15 ▷ En déduire que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t.$$

16 ▷ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^{2p}\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas $p=0$, cette intégrale est communément appelée “Intégrale de Dirichlet”.

17 ▷ Montrer que :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos(2(p-k)t)\right).$$

Indication : On pourra développer $\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2p}$.

18 ▷ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2p+1)!}{2^{2p}.(p!)^2}\cdot$$

Correction Mines 2024 MP-MPI Maths I

Adrien Joseph et Jean Nougayrède

15 mai 2024

Avertissement. Il y a sûrement des coquilles dans ce corrigé. Il y en a également dans le sujet original.

Partie I : Calcul d'une intégrale

1. Soit $t > 0$. Supposons $1 + te^{i\theta} = 0$. Alors :

$$te^{i\theta} = -1 \quad \text{donc} \quad t = |te^{i\theta}| = 1.$$

On en déduit $e^{i\theta} = -1$ ce qui est absurde car $\theta \in \,]-\pi, \pi[$.

Ainsi, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}$ est bien définie, et continue (par opérations) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Étude en 0. On a l'équivalent simple suivant :

$$\frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} \sim t^{x-1}$$

qui montre que f est intégrable en 0, par comparaison à un exemple de Riemann ($x-1 > -1$).

Étude en $+\infty$. On a :

$$f(t) \sim \frac{e^{-i\theta}}{t^{2-x}} = \mathrm{O}\big(\frac{1}{t^{2-x}}\big)$$

donc f est intégrable en $+\infty$, par comparaison à un exemple de Riemann ($2 - x > 1$).

En conclusion, f est bien définie et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour tout $(t, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi, \pi[$, on pose :

$$g(t, \theta) = \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}.$$

Soit $t > 0$. La fonction $\theta \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}$ est de classe C^1 sur $]-\pi, \pi[$ et de dérivée :

$$\theta \mapsto -\frac{t^x i e^{i\theta}}{(1+te^{i\theta})^2}$$

Pour tout $\theta \in \,]-\pi, \pi[$, la fonction $t \mapsto g(t, \theta)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Hypothèse de domination. Soit $\beta \in \,]0, \pi[$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [-\beta, \beta]$.

On a :

$$\Big|\frac{\partial g}{\partial \theta}(t, \theta)\Big| = \frac{t^x}{|1+te^{i\theta}|^2} = \frac{t^x}{1+t^2+2t\underbrace{\cos\theta}_{\geq \cos\beta}} \leq \underbrace{\frac{t^x}{1+t^2+2t\cos\beta}}_{=\varphi_\beta(t)}.$$

La fonction φ_β est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\varphi_\beta(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-x}} \quad \text{avec} \quad 2 - x > 1,$$

ce qui montre que φ_β est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et fournit l'hypothèse de domination sur tout segment.

Conclusion : r est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$ et :

$$\forall\theta\in\,]-\pi,\pi[\quad r'(\theta)=-ie^{i\theta}\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\,\mathrm{d}t.$$

3. Tout d'abord, la fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall t>0\quad h'(t)=xt^{x-1}\frac{1}{1+te^{i\theta}}-t^x\frac{e^{i\theta}}{(1+te^{i\theta})^2}.$$

Les fonctions $\theta\mapsto e^{ix\theta}$ et r sont de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$. Par produit, g est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$ et :

$$\forall\theta\in\,]-\pi,\pi[\quad g'(\theta)=(ixr(\theta)+r'(\theta))e^{ix\theta}.$$

Par linéarité de l'intégrale on en déduit :

$$\forall\theta\in\,]-\pi,\pi[\quad g'(\theta)=ie^{ix\theta}\int_0^{+\infty}\frac{xt^{x-1}}{1+te^{i\theta}}-\frac{e^{i\theta}t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\,\mathrm{d}t=ie^{ix\theta}\int_0^{+\infty}h'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Limite de h en 0^+. Comme $x>0$, on a, par opérations :

$$h(t)\xrightarrow[t\to0^+]{}0.$$

Limite de h en $+\infty$. On a l'équivalent simple suivant :

$$h(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{e^{-i\theta}}{t^{1-x}}\quad\text{avec}\quad 1-x>0.$$

On en déduit :

$$h(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

D'après ce qui précède, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}h'$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty}h'=\lim_{+\infty}h-\lim_{0^+}h=0.$$

On en déduit :

$$\forall\theta\in\,]-\pi,\pi[\quad g'(\theta)=0$$

donc g est une fonction constante sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

4. Soit $\theta\in\,]0,\pi[$. Alors $(\theta,-\theta)\in\,]-\pi,\pi[^2$ donc, par la question précédente :

$$g(-\theta)=g(\theta)\quad\text{puis}\quad\frac{1}{2i}(g(-\theta)e^{ix\theta}-g(\theta)e^{-ix\theta})=g(\theta)\frac{e^{ix\theta}-e^{-ix\theta}}{2i}=g(\theta)\sin(x\theta).$$

En repartant de la définition en g, on a aussi :

$$\begin{aligned}g(-\theta)e^{ix\theta}-g(\theta)e^{-ix\theta}&=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\Big(\frac{1}{1+te^{-i\theta}}-\frac{1}{1+te^{i\theta}}\Big)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\frac{2it\sin\theta}{(1+te^{-i\theta})(1+te^{i\theta})}\,\mathrm{d}t\\&=2i\sin\theta\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{1+t^2+2t\cos\theta}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

ce qui conclut.

5. Soit $\theta \in \left]0,\pi\right[$. Comme $\sin\theta$ est strictement positif, on peut effectuer le changement de variable affine strictement croissant $[t = u\sin\theta - \cos\theta]$ dans la dernière intégrale de la question précédente. On obtient alors :

$$\begin{aligned} g(\theta)\sin(x\theta) &= \sin\theta \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+2t\cos\theta+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \sin\theta \int_{\mathrm{cotan}\,\theta}^{+\infty} \frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{1+2u\cos\theta\sin\theta-2\cos^2\theta+u^2\sin^2\theta+\cos^2\theta-2u\sin\theta\cos\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathrm{cotan}\,\theta}^{+\infty} \frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{u^2\sin^2\theta+\sin^2\theta}\sin^2\theta\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathrm{cotan}\,\theta}^{+\infty} \frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{1+u^2}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

6. Pour tout $\theta \in \left[\pi/2,\pi\right[$, on pose f_θ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\theta(u) = \begin{cases} \dfrac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{1+u^2} & \text{si} \quad u > \mathrm{cotan}\,\theta \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

On a :

$$\cos\theta \xrightarrow[\theta\to\pi^-]{} -1 \quad \text{et} \quad \sin\theta \xrightarrow[\theta\to\pi^-]{} 0^+ \quad \text{donc} \quad \mathrm{cotan}\,\theta \xrightarrow[\theta\to\pi^-]{} -\infty.$$

Soit $u \in \mathbb{R}$. Pour θ assez proche de π^-, on a :

$$f_\theta(u) = \frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{1+u^2} \quad \text{donc} \quad f_\theta(u) \xrightarrow[\theta\to\pi^-]{} \frac{1}{1+u^2}$$

par continuité de $s \mapsto s^x$ en 1.

Hypothèse de domination. Soit $\theta \in \left[\pi/2,\pi\right[$ et $u > \mathrm{cotan}\,\theta$.

Si $u \leq 0$, alors :

$$0 \leq u\sin\theta - \cos\theta \leq 1 \quad \text{donc} \quad |f_\theta(u)| = \frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{1+u^2} \leq \frac{1}{1+u^2}$$

par croissance de $s \mapsto s^x$ sur $\mathbb{R}_+$.

Si $u > 0$, alors :

$$0 \leq u\sin\theta - \cos\theta \leq u+1 \quad \text{donc} \quad |f_\theta(u)| \leq \frac{(u+1)^x}{1+u^2}.$$

On dispose donc de la majoration suivante :

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad |f_\theta(u)| \leq \varphi(u) \quad \text{avec} \quad \varphi(u) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad u \leq 0 \\ \dfrac{(u+1)^x}{1+u^2} & \text{si} \quad u > 0. \end{cases}$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, intégrable en $-\infty$ car nulle au voisinage de $-\infty$ et :

$$\varphi(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{2-x}} \quad \text{avec} \quad 2-x > 1$$

donc φ est intégrable en $+\infty$.

Par le théorème de convergence dominée (et la question précédente), il vient :

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{\mathbb{R}} f_\theta(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[\theta\to\pi^-]{} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

7. Comme g est une fonction constante sur $\left]-\pi,\pi\right[$, on a aussi :

$$g(\theta)\sin(x\theta) = g(0)\sin(x\theta) \xrightarrow[x\to\theta^-]{} g(0)\sin(x\pi) = \sin(x\pi)\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Par unicité de la limite, on en déduit :

$$\sin(x\pi)\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\big[\arctan u\big]_{-\infty}^{+\infty}=\pi.$$

Comme $x\in\,]0,1[$, on a $x\pi\in\,]0,\pi[$ donc $\sin(x\pi)\neq 0$ puis :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

8. Par la relation de Chasles, on a :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{1}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Dans la seconde intégrale, on effectue le changement de variable $[t=1/u]$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{1}\frac{u^{1-x}}{1+1/u}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\int_0^1\frac{u^{-x}}{1+u}\,\mathrm{d}u.$$

On conclut par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{1}\frac{t^{x-1}+t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

9. Pour tout $t\in\,]0,1[$, on a :

$$\frac{t^{x-1}}{1+t}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{x-1+k}.$$

Hypothèse de domination. Soit $t\in\,]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}$. La suite $(t^{x-1+k})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. Par le théorème des séries alternées, on dispose donc de la majoration :

$$\Big|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{x-1+k}\Big|\leq t^{x-1}.$$

La fonction $t\mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ (exemple de Riemann avec $x-1>-1$).

Par le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$\int_0^1\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{x-1+k}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{x-1+k}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{x-1+k}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui justifie l'interversion série-intégrale :

$$\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^1 t^{x-1+k}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}.$$

10. D'après la question précédente, on a :

$$\forall y\in\,]-1,0[\qquad\int_0^1\frac{t^y}{1+t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{y+1+k}.$$

En remplaçant y par $-x$, on en déduit :

$$\int_0^1\frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{-x+1+k}.$$

Par somme, en utilisant la question 8, on peut conclure :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{n+1-x}.$$

11. D'après la question 7 et par décalage d'indice dans la seconde somme, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sin(\pi x)} &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-x}\\ &= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \Big(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\Big)\\ &= \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-x^2}\cdot\end{aligned}$$

12. Soit $y \in]0, \pi[$. On prend $x = y/\pi$ dans ce qui précède pour obtenir :

$$\frac{\pi}{\sin y} = \frac{\pi}{y} - \frac{2y}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - (y/\pi)^2}\cdot$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned}2y \sin y \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{y^2 - n^2\pi^2} &= -2y \sin y \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - (y/\pi)^2}\\ &= \frac{\sin y}{\pi}\Big(\frac{\pi}{\sin y} - \frac{\pi}{y}\Big)\\ &= 1 - \frac{\sin y}{y}\cdot\end{aligned}$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichelet généralisée

13. Considérons la fonction continue (par opérations) $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui à tout $t > 0$ associe $\dfrac{1 - \Big((\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}$.

Étude en 0. Puisque $\lim_{t\to 0} \cos(t) = 1$ et que $(1+u)^{2p+1} - 1 \underset{u\to 0}{\sim} (2p+1)u$, on a :

$$\Big((\cos(t)\Big)^{2p+1} - 1 \underset{t\to 0}{\sim} (2p+1)\Big(\cos(t) - 1\Big) \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{2p+1}{2} t^2. \qquad (1)$$

Donc $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{2p+1}{2}\cdot$ Puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{2p+1}{2}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\dfrac{2p+1}{2} \geq 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Étude en $+\infty$. On remarque que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \varphi(t) \leq \dfrac{2}{t^2}$. Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \Big((\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Posons $\psi_1 : t > 0 \mapsto -\dfrac{1}{t}$ et $\psi_2 : t > 0 \mapsto 1 - \Big((\cos(t)\Big)^{2p+1}$. D'après l'équivalent obtenu dans la relation (1), on a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - \Big((\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t} = 0\cdot$$

Par ailleurs, comme la fonction cos est bornée,

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{1 - \Big((\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t} = 0.$$

Ainsi le crochet $[\psi_1\psi_2]_0^{+\infty}$ converge et est nul. Puisque les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont par ailleurs de classe $\mathcal{C}^1$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} {\psi_1}'(t)\psi_2(t)\,\mathrm{d}t$ converge d'après la première partie de la question, l'intégration par parties assure d'une part que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_1(t){\psi_2}'(t)\,\mathrm{d}t$ converge et d'autrre part que $\displaystyle\int_0^{+\infty} {\psi_1}'(t)\psi_2(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \psi_1(t){\psi_2}'(t)\,\mathrm{d}t$. D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big((\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

14. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Remarquons que la fonction intégrée est continue sur le segment $[\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi,\, \frac{\pi}{2}+n\pi]$. Faisons les changements de variable affines $[s=t-n\pi]$

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(s)\Big)^{2p}\,\frac{(-1)^n\sin(s)}{s+n\pi}\,\mathrm{d}s$$

et $[u=-s]$

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(u)\Big)^{2p}\,\frac{(-1)^n\sin(u)}{u-n\pi}\,\mathrm{d}u.$$

En sommant puis en divisant par 2, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}(-1)^n\sin(t)\left(\frac{1}{t+n\pi}+\frac{1}{t-n\pi}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

la dernière égalité venant de la parité de la fonction intégrée.

15. Soit $N\in\mathbb{N}^*$. En sommant de $n=1$ à $n=N$ la relation trouvée à la question précédente et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+N\pi} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Considérons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t\in[0,\frac{\pi}{2}]\mapsto \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\dfrac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\cdot$ Alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $|f_n(t)|\leq \dfrac{1}{\pi(n^2-\frac{1}{4})}\cdot$ Comme la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0,\frac{\pi}{2}]$. Comme par ailleurs pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, les fonctions f_n sont continues, on en déduit que la série $\displaystyle\sum\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. D'où

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t.$$

La relation (2) se réécrit donc ainsi :

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+N\pi} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Or, d'après la question 13, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. On en déduit finalement que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big((\cos(t)\Big)^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t.$$

16. D'après la question 13, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. En utilisant la relation de Chasles puis la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\ =\;&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big((\cos(t)\Big)^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t\\ =\;&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big((\cos(t)\Big)^{2p}\left(\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t\\ =\;&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

la dernière égalité venant de la question 12.

17. On écrit, en utilisant la formule d'Euler puis la formule du binôme de Newton et enfin en regroupant les termes :

$$\begin{aligned}2^{2p}(\cos(t))^{2p}&=(e^{it}+e^{-it})^{2p}\\ &=\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}e^{ikt}e^{-i(2p-k)t}\\ &=\binom{2p}{p}+\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}e^{2i(k-p)t}+\sum_{k=p+1}^{2p}\binom{2p}{k}e^{2i(k-p)t}\\ &=\binom{2p}{p}+\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}e^{2i(k-p)t}+\binom{2p}{2p-k}e^{2i(2p-k-p)t}\\ &=\binom{2p}{p}+\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\left(e^{2i(k-p)t}+e^{2i(p-k)t}\right)\\ &=\binom{2p}{p}+2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos(2(p-k)t).\end{aligned}$$

18. D'après les questions 13 et 16,

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\Big((\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t=(2p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\mathrm{d}t$$

donc, d'après la question précédente et la linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\Big((\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\frac{2p+1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}+\frac{2p+1}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2(p-k)t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $k\in\mathbb{Z}^*$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2kt)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\sin(2kt)}{2k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$. Donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\Big((\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\frac{2p+1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}=\frac{\pi}{2}\frac{2p+1}{2^{2p}}\frac{(2p)!}{(p!)^2}=\frac{\pi}{2}\frac{(2p+1)!}{2^{2p}.(p!)^2}.$$