My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Td : Matrices

Partie 1 : Matrices Equivalentes

Exercice 1

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et M la matrice $M = \begin{pmatrix} A & O_{n,p} \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+p}(\mathbb{K})$.

Établir

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B).$$

Indication
Il existe donc $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $R, S \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que

$$PAQ = J_r \text{ et } RBS = J_s.$$

Exercice 2

Soient $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

Montrer $$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix} = n + \mathrm{rg}(C).$$

Indication : Multiplier par la matrice inversible $\begin{pmatrix} I_n & -B \\ O_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$

Exercice 3

Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ O_{q,p} & C \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p+q}(\mathbb{R})$.

Déterminer le rang de M en fonction de celui de C.

Indication : Multiplier par la matrice inversible $M' = \begin{pmatrix} A^{-1} & O_{p,q} \\ O_{q,p} & I_q \end{pmatrix}$.

Partie 1 : Matrices Semblables (CCP 2019)

Q8. Justifier que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et ~~le même polynôme caractéristique~~.

Q9. On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même déterminant, le même rang et le ~~même polynôme caractéristique.~~

Ces deux matrices sont-elles semblables ?

Ont-elles le même polynôme minimal ?

Q10. On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Établir que ces deux matrices sont semblables par :

: en utilisant u l'endomorphisme associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E ;

Q11. Démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & a_1 \\ . & . & . & . & a_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On pourra utiliser l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice A.

Q15. Démontrer que quels que soient les réels non nuls a, b et le réel λ, les matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P \quad R \quad iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

Q16. Démontrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.

Q17. Justifier que la fonction $x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $R + xS$ soit inversible.

Q18. Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(Corrigé)

Exercice 1

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & \mathrm{O}_{n,p} \\ \mathrm{O}_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+p}(\mathbb{K}).$$

Établir

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B).$$

Solution

Posons $r = \mathrm{rg}(A)$ et $s = \mathrm{rg}(B)$. Les matrices A et B sont respectivement équivalentes aux matrices

$$J_r = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & \mathrm{O}_{r,n-r} \\ \mathrm{O}_{n-r,t} & \mathrm{O}_{n-r} \end{pmatrix} \text{ et } J_s = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_s & \mathrm{O}_{s,p-s} \\ \mathrm{O}_{p-s,t} & \mathrm{O}_{p-s} \end{pmatrix}.$$

Il existe donc $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $R, S \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que

$$PAQ = J_r \text{ et } RBS = J_s.$$

En opérant par blocs, on a alors

$$\begin{pmatrix} P & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_r & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & J_s \end{pmatrix}$$

avec les facteurs

$$\begin{pmatrix} P & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & R \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} Q & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & S \end{pmatrix}$$

inversibles.
On en déduit

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} J_r & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & J_s \end{pmatrix} = r + s.$$

Exercice 2

Soient $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Montrer

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ \mathrm{O}_{p,n} & C \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg}(C).$$

Solution

En multipliant par la matrice inversible

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -B \\ \mathrm{O}_{p,n} & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ \mathrm{O}_{p,n} & C \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{O}_{n,p} \\ \mathrm{O}_{p,n} & C \end{pmatrix}.$$

En posant $r = \operatorname{rg}(C)$, on peut écrire $PCQ = J_r$ avec

$$P, Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ et } J_r = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & \mathrm{O}_{r,p-r} \\ \mathrm{O}_{p-r,r} & \mathrm{O}_{p-r} \end{pmatrix}.$$

En multipliant à gauche et à droite par les matrices inversibles

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{O}_{n,p} \\ \mathrm{O}_{p,n} & P \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{O}_{n,p} \\ \mathrm{O}_{p,n} & Q \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ \mathrm{O}_{p,n} & C \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{O}_{n,p} \\ \mathrm{O}_{p,n} & J_r \end{pmatrix} = n + r.$$

Exercice 3

Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathrm{O}_{q,p} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}).$$

Déterminer le rang de M en fonction de celui de C.

Solution

Introduisons la matrice inversible

$$M' = \begin{pmatrix} A^{-1} & \mathrm{O}_{p,q} \\ \mathrm{O}_{q,p} & \mathrm{I}_q \end{pmatrix}.$$

On a $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(MM')$ avec

$$MM' = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & B \\ \mathrm{O}_{q,p} & C \end{pmatrix}.$$

Par opérations élémentaires sur les colonnes, la matrice MM' a le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & \mathrm{O}_{p,q} \\ \mathrm{O}_{q,p} & C \end{pmatrix}.$$

Enfin, les opérations élémentaires déterminant le rang de C se transposent à la matrice en cours afin d'en donner le rang. Au final

$$\mathrm{rg}(M) = p + \mathrm{rg}(C).$$

Exercice 4

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ \mathrm{O}_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K}).$$

On suppose B inversible. Établir

$$\mathrm{rg}(M) = p \Leftrightarrow A = \mathrm{O}_n.$$

Solution

L'implication $(\Longleftarrow)$ est immédiate car $\mathrm{rg}(B) = p$.
Inversement, supposons $\mathrm{rg}(M) = p$.
Puisque B est inversible, les p dernières lignes de M sont indépendantes et donc les autres lignes de M sont combinaisons linéaires de celles-ci puisque $\mathrm{rg}(M) = p$. Puisque les n premières lignes de M sont combinaisons linéaires des p dernières lignes de M, on a

$$A = \mathrm{O}_n.$$

(a) Exprimer le rang de la matrice M décrite par blocs

$$M=\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}.$$

(b) Calculer l'inverse de M lorsque cela est possible.

Solution

(a) **Méthode:** Par opérations élémentaires sur les rangées, on peut opérer sur les blocs tout en conservant le rang de la matrice étudiée.
En retranchant[1] la première ligne de blocs à la deuxième ligne de blocs, on obtient

$$\operatorname{rg}(M)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & A \\ \mathrm{O}_n & B-A \end{pmatrix}.$$

En opérant sur les colonnes de blocs, on poursuit

$$\operatorname{rg}(M)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & \mathrm{O}_n \\ \mathrm{O}_n & B-A \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'égalité

$$\operatorname{rg}(M)=\operatorname{rg}(A)+\operatorname{rg}(B-A).$$

En effet, les opérations élémentaires qui transforment A et $B-A$ en matrices échelonnées peuvent être adaptées à la matrice en cours. Le nombre total de pivots obtenus est la somme du nombre de pivots pour A et $B-A$.

(b) La matrice M est inversible si, et seulement si, A et $B-A$ le sont. Supposons que ce soit le cas.
Méthode: On résout l'équation $MX=Y$ en écrivant les colonnes X et Y par blocs.

Posons

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \text{ avec } X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

et étudions l'équation $MX=Y$ ce qui correspond au système

$$\begin{cases} AX_1 & +AX_2 & =Y_1 \\ AX_1 & +BX_2 & =Y_2. \end{cases}$$

En retranchant la première équation à la seconde, on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} AX_1+AX_2 & =Y_1 \\ (B-A)X_2 & =Y_2-Y_1. \end{cases}$$

Sachant $B-A$ inversible, on exprime X_2 en fonction de Y_1 et Y_2 par la deuxième équation et l'inversibilité de A permet alors d'exprimer X_1 par la première équation

$$\begin{cases} X_1 & =\left(A^{-1}+(B-A)^{-1}\right)Y_1 & +(A-B)^{-1}Y_2 \\ X_2 & =(A-B)^{-1}Y_1 & +(B-A)^{-1}Y_2. \end{cases}$$

Finalement, l'inverse de M est[2]

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + (B-A)^{-1} & (A-B)^{-1} \\ (A-B)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Soient $A, B, C, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) On note $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en accolant les colonnes de B à droite de celles de A.
Montrer

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A) \Leftrightarrow \exists U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ B = AU.$$

(b) On note $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en accolant les lignes de C en dessous de celles de A.
Montrer

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A) \Leftrightarrow \exists V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ C = VA.$$

(c) En déduire

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A) \Leftrightarrow \exists U, V,\ \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}.$$