Td : Matrices

Partie 1 : Mines 2020

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$.

Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dit **nilpotent** lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.

1. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Montrer que $\operatorname{tr} u^k = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

2. On fixe une base $\mathbf{B}$ de E. On note $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans $\mathbf{B}$ est triangulaire supérieure stricte. Justifier que $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ et que sa dimension vaut $\frac{n(n-1)}{2}$.

3. Soit $\mathbf{B}$ une base de E. Montrer que
$$\{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}\} = \{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}(E)\} = [\![1, n]\!].$$

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers $p \geq q \geq 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ est libre.

5. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, de nilindice p. Déduire de la question précédente que si $p \geq n-1$ et $p \geq 2$ alors $\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^{p-1}$ est de dimension 1.

Partie 2 : Mines 2014

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle exponentielle de A, et on note $\exp(A)$ ou e^A, la matrice $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. On admet que si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont telles que $AB = BA$, on a $e^{A+B} = e^A e^B$. Enfin, on appelle *bloc de Jordan d'ordre n* associé au nombre complexe λ, la matrice

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice n.

4) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N^{n-1}X \neq 0$ et que la famille $\{X, NX, \dots, N^{n-1}X\}$ est libre.

5) En déduire que N est semblable à $J_n(0)$.

6) Montrer que $e^{J_n(0)}$ est inversible et que $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n.

7) Montrer que si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, on a $Pe^{J_n(0)}P^{-1} = e^{PJ_n(0)P^{-1}}$. En déduire qu'il existe $\widetilde{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(0) = \widetilde{N}e^{\widetilde{N}}$.

Soit λ un nombre complexe non nul.

8) Justifier l'existence d'un nombre complexe $\mu \neq -1$ tel que $\lambda = \mu e^{\mu}$ et montrer que l'on peut écrire :
$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + (\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0))$$
où p est un polynôme à coefficients complexes qui dépend de μ.

9) Montrer que $(\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0))$ est nilpotente d'indice n. En déduire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(\lambda) = Me^M$.

C. Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p. On suppose dans un premier temps que $1 < p < n$.

10) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$ telles que N est semblable à la matrice par blocs suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array}\right)$$

où O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{C})$.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$, on définit la matrice par blocs T_X suivante :

$$T_X = \left(\begin{array}{c|c} I_p & X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

11) Montrer que T_X est inversible et calculer son inverse. Vérifier que $A' = T_X A T_X^{-1}$ est de la forme

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & Y \\ \hline O & Z \end{array}\right)$$

où l'on explicitera les matrices $Y \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $Z \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$.

12) Montrer que dans l'écriture de A' de la question précédente, on peut choisir $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ de telle sorte que toutes les lignes de Y, à l'exception éventuelle de la dernière, soient nulles. (On pourra noter $X_{(i)}$ la $i$ème ligne de X pour $i \in \{1,\dots,p\}$ et étudier l'effet sur les lignes de X de la multiplication par $J_p(0)$ dans le produit $J_p(0)X$.)

13) Justifier que A' est nilpotente d'indice p. En déduire que si la matrice X est choisie comme dans la question précédente, la matrice Y est nulle. (On pourra raisonner par l'absurde en étudiant l'effet des endomorphismes associés aux puissances de A' sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.)

14) En déduire que lorsque $1 \leqslant p \leqslant n$, la matrice nilpotente N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

où r et $p_1, p_2, \dots, p_r$ désignent des entiers naturels non nuls.

Partie 2 : Mines 2014

B. Représentation Ae^{A} d'un bloc de Jordan

4) Soit f l'endomorphisme canoniquement à N, alors $f^{n}=0$ et $f^{n-1}\neq 0$, donc $\exists x\in\mathbb{C}^{n}$ telle que $f^{n-1}(x)\neq 0$, supposons par l'absurde que la famille $(x, f(x), \dots f^{n-1}(x))$ est liée, soit donc les complexes $a_0, \dots, a_{n-1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{i}(x)=0$, l'ensemble $J=\{i\in[0,n-1]\cap\mathbb{N}\ /\ a_i\neq 0\}$ est non vide et soit j son plus petit élément.
L'égalité $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{i}(x)=0$ s'écrit $\sum_{i=j}^{n-1} a_i f^{i}(x)=0$, en composant par f^{n-j-1}, on obtient $a_j f^{n-1}(x)=0$, alors $a_j=0$ ce qui est absurde avec $j\in J$, la famille est donc libre.

5) La famille $(f^{n-1}(x),...f(x),x)$ est libre c'est donc une base de $\mathbb{C}^n$.
La matrice de l'endomorphisme f dans cette base est $J_n(0)$, donc N est semblable à $J_n(0)$.

6) $J_n(0)$ et $-J_n(0)$ commutent donc $I_n = e^{J_n(0)-J_n(0)} = e^{J_n(0)}e^{-J_n(0)}$, ainsi $e^{J_n(0)}$ est inversible et $\left(e^{J_n(0)}\right)^{-1} = e^{-J_n(0)}$.
$e^{J_n(0)} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(J_n(0))^k}{k!}$ car $J_n(0)$ est nilpotente d'indice n d'après la question 5) .
Alors $e^{J_n(0)}$ est un polynôme en $J_n(0)$ donc commutent avec $J_n(0)$, alors $(J_n(0)e^{J_n(0)})^n = (J_n(0))^n(e^{J_n(0)})^n = 0$.
Si on suppose que $(J_n(0)e^{J_n(0)})^{n-1} = 0$ alors $(J_n(0))^{n-1}(e^{J_n(0)})^{n-1} = 0$ et comme $e^{J_n(0)}$ est inversible alors $(J_n(0))^{n-1} = 0$, absurde : donc $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n.

7) $Pe^{J_n(0)}P^{-1} = P\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(J_n(0))^k}{k!}P^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1}P\frac{(J_n(0))^k}{k!}P^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(PJ_n(0)P^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(PJ_n(0)P^{-1})^k}{k!} = e^{PJ_n(0)P^{-1}}$.
Si $\overline{N}$ existe alors elle est nilpotente d'indice n, En effet :
L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M \longmapsto \overline{N}M$ est continue, car linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension fini, donc :

$$\overline{N}e^{\overline{N}} = \overline{N}\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{\overline{N}^k}{k!} = \lim_{p\to+\infty}\overline{N}\sum_{k=0}^{p}\frac{\overline{N}^k}{k!} = \lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{\overline{N}^k}{k!}\overline{N} = e^{\overline{N}}\overline{N}$$

$e^{\overline{N}}$ est inversible et son inverse est $e^{-\overline{N}}$.
$\left(\overline{N}e^{\overline{N}}\right)^n = \overline{N}^n e^{n\overline{N}} = 0$, comme $e^{n\overline{N}}$ est inversible, alors $\overline{N}^n = 0$.
Supposons que $\overline{N}^{n-1} = 0$, alors $\overline{N}^{n-1}(e^{\overline{N}})^{n-1} = 0 = \left(\overline{N}e^{\overline{N}}\right)^{n-1} = (J_n(0))^{n-1}$, ce qui est absurde.
Donc $\overline{N}$ est semblable à $J_n(0)$, alors il existe P inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\overline{N} = PJ_n(0)P^{-1}$, l'inconnue devient P.
L'équation $\overline{N}e^{\overline{N}} = J_n(0)$ est équivalente à $PJ_n(0)P^{-1}Pe^{J_n(0)}P^{-1} = J_n(0)$ c'est à dire $PJ_n(0)e^{J_n(0)}P^{-1} = J_n(0)$, de la question 6) la matrice $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n, donc semblable à $J_n(0)$ alors P existe.

8) Avec la partie A) question 3, il existe $\mu \in D$, tel que $g(\mu) = \lambda$, c'est à dire $\mu e^{\mu} = \lambda$, le réel $\mu \neq 0$ donc μ appartient au demi plan ouvert $\{z \in \mathbb{C}\ \Re(z) > 0\}$, alors $\mu \neq -1$.
$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = (\mu I_n + J_n(0))e^{\mu I_n + J_n(0)} = \mu e^{\mu}e^{J_n(0)} + J_n(0)e^{\mu}e^{J_n(0)} =$
$\mu e^{\mu}\left(I_n + J_n(0) + (J_n(0))^2\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(J_n(0))^{k-2}}{k!}\right) + J_n(0)e^{\mu}\left(I_n + J_n(0)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(J_n(0))^{k-1}}{k!}\right)$

$$= \lambda I_n + (\mu+1)e^{\mu} J_n(0) + (J_n(0))^2 \left(\mu e^{\mu} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(J_n(0))^{k-2}}{k!} + e^{\mu} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(J_n(0))^{k-1}}{k!}\right)$$

Avec $P(X) = \left(\mu e^{\mu} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{X^{k-2}}{k!} + e^{\mu} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X^{k-1}}{k!}\right)$ le résultat est vrai.

9) Les deux matrices $J_n(0)$ et $(J_n(0))^2 P(J_n(0))$ commutent, donc

$((\mu+1)e^{\mu} J_n(0) + (J_n(0))^2 P(J_n(0)))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((\mu+1)e^{\mu} J_n(0))^k (J_n(0))^{2n-2k} (P(J_n(0))^{n-k}$

Le nombre $2n-2k+k = 2n-k \geq n$ pour tout $k \in [0,n] \cap \mathbb{N}$, donc cette somme est nulle puisque tous ses termes sont nuls.

$((\mu+1)e^{\mu} J_n(0) + (J_n(0))^2 P(J_n(0)))^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} ((\mu+1)^k e^{k\mu} (J_n(0))^{2n-2-k} (P(J_n(0))^{n-1-k}$

Tous les termes de la somme sont nuls sauf le terme qui correspond à $k = n-1$ et $(J_n(0))^{n-1} P(J_n(0))^0 \neq 0$.

Remarque : la matrice $P(J_n(0))$ est triangulaire supérieure et le terme de sa diagonale est $\mu e^{\mu} + e^{\mu} = (\mu+1)e^{\mu} \neq 0$ (c'est le cœfficient constant du polynôme P), donc inversible.

Alors la matrice $(\mu+1)e^{\mu} J_n(0) + (J_n(0))^2 P(J_n(0))$ est nilpotente d'ordre n. donc semblable à $J_n(0)$, donc $\exists Q \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$(\mu+1)e^{\mu} J_n(0) + (J_n(0))^2 P(J_n(0) = Q J_n(0) Q^{-1}$.

Alors $J_n(\mu) e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + Q J_n(0) Q^{-1} = Q(\lambda I_n + J_n(0)) Q^{-1} = Q J_n(\lambda) Q^{-1}$

Donc $J_n(\lambda) = Q^{-1} J_n(\mu) Q Q^{-1} e^{J_n(\mu)} Q = Q^{-1} J_n(\mu) Q e^{Q^{-1} J_n(\mu) Q} = M e^M$, avec $M = Q^{-1} J_n(\mu) Q$

C. Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

10) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice N, par la même méthode que celle de B.4), il existe $x \in \mathbb{C}^n$, telle que $(f^{p-1}(x), \dots, x)$ est libre, on la complète par le théorème de la base incomplète, en une base $\mathscr{B}'$, dans cette base la matrice de f est de la forme $A = \begin{pmatrix} J_p(0) & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Les matrices A et N sont donc semblables.

11) T_X est triangulaire supérieure et ses termes diagonaux sont tous égaux à 1, $\det T_X = 1$, donc inversible.

Le produit de T_X et de $\begin{pmatrix} I_p & -X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$ donne l'identité alors c'est son inverse.

$A' = T_X A T_X^{-1} = \begin{pmatrix} J_p(0) & -J_p(0)X + B + XC \\ 0 & C \end{pmatrix}$. On prend $Y = -J_p(0)X + B + XC$ et $X = Z$.

12) C'est simple de vérifier que $J_n(0)X = \begin{pmatrix} X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ 0 \end{pmatrix}$, en posant $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ \\ B_n \end{pmatrix}$ l'équation $Y = -J_p(0)X + B + XC$ peut se traduit par $\begin{cases} Y_1 = -X_2 + B_1 + X_1 C \\ \vdots \\ Y_{n-1} = -X_n + B_{n-1} + X_{n-1}C \\ Y_n = 0 + B_n + X_n C \end{cases}$

Soit $X_1 = 0$ par exemple, alors on peut choisir X_2 pour que $Y_1 = 0$.

X_2 est fixé alors on peut choisir X_3 pour que $Y_2 = 0$, et ainsi de suite jusqu'à obtenir X_{n-1}, on peut choisir X_n pour que $Y_{n-1} = 0$, conclusion on peut choisir X pour que $Y_1 = ... = Y_{n-1} = 0$, ainsi le vecteur $Y = 0$ sauf éventuellement Y_n.

13) Les matrices N, A et A' sont semblables, donc A' est nilpotente, et si P est inversible telle que $N = PA'P^{-1}$, alors $\forall k \in \mathbb{N},\ N^k = 0 \Longleftrightarrow A'^k = 0$.

Alors A' est nilpotente d'indice n.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A' et $\mathscr{B}(e_1, ...e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Soit $i \in \{p+1, ..., n\}$ posons $\text{vect}(e_{p+1}, ...e_n) = F$. De la forme de A', on peut poser $f(e_i) = y_i e_p + x$, où $y_i \in \mathbb{C}$ et $x \in F$.

Par récurrence on montre que $\forall k \in \{1, ..., p-1\} \quad f^k(F) \subset \text{vect}(e_{p-k+1}, ...e_n)$, alors $f^p(e_i) = y_i f^{p-1}(e_p) + f^{p-1}(x)$ c'est à dire $0 = y_i e_1 + f^{p-1}(x)$, et $f^{p-1}(x) \in \text{vect}(e_2, ...e_n)$, donc $y_i = 0$ par conséquent la dernière ligne $(y_{p+1}, ..., y_n)$ de Y est nulle, alors $Y = 0$.

14) On raisonne par récurrence sur n.

Pour $n = 1$ rien à faire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que le résultat est vrai pour toute matrice d'ordre n, soit $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice $p_1 \leq n+1$.

Si $p_1 = n+1$, on applique B.5), et A est semblable à $J_{n+1}(0)$.

Si $1 \leq p_1 < n+1$, des questions précédente A est semblable à A' qui de la forme $A' = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, comme A est nilpotente d'indice $n+1$, alors A' est nilpotente d'indice $n+1$, donc $C^{n+1} = 0$ ainsi C est nilpotente par ailleurs son ordre est $n+1-p_1 \leq n$, on applique l'hypothèse de récurrence sur C il existe $p_2, ..., p_r$ des entiers naturels non nuls tels que C est semblable à

$$J = \begin{pmatrix} J_{p_2}(0) & & & (0) \\ & J_{p_3}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

Si Q désigne la matrice inversible telle que $C = QJQ^{-1}$, alors

$$A' = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ est de la forme donnée et elle est semblable à A. le résultat est donc vrai pour toute matrice A nilpotente.

Corrigé

Partie 1 : Mines 2020

I. Généralités sur les endmorphismes nilpotents

1. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors il est trigonalisable (puisque admet un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{R}$) et son spectre est réduit à $\{0\}$, donc $tr(u) = 0$. De même u^k est nilpotent, donc $tr\left(u^k\right) = 0$.

2. $0 \in \mathcal{N}_B$ de plus si u, v sont deux éléments de $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors $mat_{\mathcal{B}}(\lambda u + \mu v) = \lambda mat_{\mathcal{B}}(u) + \mu mat_{\mathcal{B}}(u) \in T_n^{++}$, donc $\lambda u + \mu v \in \mathcal{N}_B$.

   L'application $f : \mathcal{N}_B \rightarrow T_n^{++}(\mathbb{R})$, $u \mapsto mat_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels donc $\dim \mathcal{N}_B = \dim T_n^{++} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3. Si $u \in \mathcal{N}(E)$ ou $\mathcal{N}_B$, et p l'indice de nilpotence, alors $p \leq n$ donc $u^n = 0$, donc $1 \leq v(u) \leq n$.

   D'autre part si u désigne l'endomorphisme de E de matrice $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans B,

   alors $v\left(u^k\right) = k$ pour $1 \leq k \leq n$, donc $[\![1, n]\!]$. Donc $\{v(u) / u \in \mathcal{N}(E)\} = \{v(u) / u \in \mathcal{N}_B\} = [\![1, n]\!]$.

4. u est nilpotent d'indice n, donc $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est libre.

   Si la famille $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre, alors $u^{q-1}(y) \neq 0$ et donc $(y, u(y), ..., u^{q-1}(y))$ est libre.

   Soit $\left(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{p-1}, \beta_0, ..., \beta_{q-1}\right) \in \mathbb{R}^{p+q}$ tel que $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i u^i(y) = 0$.On compose par u^q, ce qui donne $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^{i+q}(x) = 0$ ou encore $\sum_{i=0}^{p-1-q} \alpha_i u^{i+q}(x) = 0$ puis par indépendance de la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ on a $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{0, 1, ..., p-1-q\}$ .Donc $\sum_{i=p-q}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i u^i(y) = 0$ puis on compose par u^{q-1} ce qui donne $\alpha_{p-q} u^{p-1}(x) + \beta_{q-1} u^{q-1}(y) = 0$ (puisque si $i > p-q$, alors $i + q - 1 \geq p$) puis par indépendance de $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$, on a $\beta_{q-1} = \alpha_{p-q} = 0$.

   On a donc $\sum_{i=p-q+1}^{p-1} \alpha_i u^{i+q-1}(x) + \sum_{i=0}^{q-2} \beta_i u^{i+q-1}(y) = 0$ puis on compose par u^{q-2} , ce qui donne que $\alpha_{p-q+1} = \beta_{q-2} = 0$.

   Supposons que $\alpha_{p-q+i} = \beta_{q-i-1}$, alors par un raisonnement analogue en composant par u^{q-i-1}, on a $\alpha_{p-q+i+1} = \beta_{q-i-2} = 0$. D'où le résultat.

5. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$ de nilindice p , l'inclusion $\operatorname{Im}(u^{p-1}) \subset \operatorname{Im}(u) \cap \ker(u)$ est immédiate ($u^p = 0$ et $p \geq 2$).

   Soit y un élément non nul de $\operatorname{Im}(u) \cap \ker(u)$ donc $y = u(a)$ avec $u^2(a) = 0$ pour un certain $a \in E$.

   Si $(u^{p-1}(x), u(a))$ est libre, alors par la question précédente la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x), a, u(a))$ est une famille libre de E de cardinal $p + 2 > n$, ce qui est absurde, la famille $(u^{p-1}(x), u(a))$ est liée, par suite $y = u(a) \in$Vect$\{u^{p-1}(x)\}$, donc $\operatorname{Im}(u) \cap \ker(u) =$Vect$\{u^{p-1}(x)\} \subset \operatorname{Im}(u^{p-1})$.

   Ce qui donne $\operatorname{Im}(u) \cap \ker(u) = \operatorname{Im}(u^{p-1}) =$Vect$\{u^{p-1}(x)\}$. En particulier $\dim \operatorname{Im}(u^{p-1}) = 1$.