

## DM Algèbre Générale

### Permutations & Matrices irréductibles (CCP 2000)

#### Préambule

Dans ce problème, on se propose d'étudier des familles de matrices que l'on rencontre lors de la résolution numérique de problèmes relatifs à des équations aux dérivées partielles de type elliptique par des méthodes de différences finies.

Matrices irréductibles - Matrices à diagonales faiblement ou fortement dominantes.

#### Notations :

Dans tout le problème, on suppose que  $N$  est un entier supérieur ou égal à 2.

$\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices carrées réelles à  $N$  lignes et  $N$  colonnes,  $\mathcal{M}_{N,P}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles à  $N$  lignes et  $P$  colonnes.

$I_N$  est la matrice unité de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ .  $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices symétriques à  $N$  lignes et  $N$  colonnes. Si  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ , ( $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tA = A$ ).

Si  $A$  appartient à  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  on pourra écrire  $A = (a_{ij}) \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, N$ .

$a_{ij}$  étant l'élément de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne de  $A$ .

$(u, v) \mapsto (u | v)_N$  de  $(\mathbb{R}^N)^2$  dans  $\mathbb{R}$  désigne le produit scalaire euclidien canonique de  $\mathbb{R}^N$ . On identifiera  $\mathbb{R}^N$  et  $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$  et pour  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ ,  $v \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$  on écrira par exemple  $(Av | v)_N$  le produit scalaire des éléments de  $\mathbb{R}^N$  correspondants : on a donc, en raison de l'identification  $(Av | v)_N = {}^t v A v$ .

$W_N$  est l'ensemble des  $N$  premiers entiers strictement positifs.

*Rappel* : une matrice réelle symétrique est dite positive (définie positive) si ses valeurs propres sont positives (strictement positives).

Tournez la page S.V.P.

**Définition 1 :**

Soient  $(e_1, e_2, \dots, e_N)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^N$  et  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, N\}$ . On appellera matrice de permutation  $P_\sigma$  associée à  $\sigma$ , la matrice  $P_\sigma$  de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  telle que  $P_\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$ . Alors  $P_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})$  où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

**Définition 2 :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ . On dit qu'une matrice  $A = (a_{ij})$  est irréductible si pour tout couple  $(S, T)$  de parties de  $W_N$  telles que  $S \cap T = \emptyset$  et  $S \cup T = W_N$ , il existe un élément  $a_{ij} \neq 0$  avec  $i \in S$  et  $j \in T$ .

Dans le cas contraire on dira que  $A$  est réductible.

**Définition 3 :**

$A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$   $A = (a_{ij})$  est à diagonale faiblement dominante si :

$$\left| \begin{array}{l} 1) \text{ pour tout indice } i \in W_N, |a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| \\ 2) \text{ pour au moins un indice } i \in W_N, |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| \end{array} \right.$$

**Définition 4 :**

$A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  est à diagonale fortement dominante si, pour tout indice  $i \in W_N$ ,  $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}|$

**Première partie****Question 1-1**

- a) Soient  $\sigma$  et  $\sigma'$  deux permutations de l'ensemble  $W_N$ .
- a.1) Montrer que  $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\sigma'}$ .
  - a.2) Montrer que  $P_\sigma$  est inversible et que  $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$ .
  - a.3) Montrer que  $P_\sigma^{-1} = {}^t P_\sigma$ .

3b) Soit  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  et  $P_\sigma \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  la matrice associée à la permutation  $\sigma$ . On définit  $B = P_\sigma^{-1} A P_\sigma = (b_{ij})$ . Exprimer  $b_{ij}$  à l'aide de  $\sigma$ .

c) Montrer que  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  est irréductible si et seulement s'il n'existe pas de matrice de permutation  $P_\sigma$  telle que  $P_\sigma^{-1} A P_\sigma$  soit de la forme :

$$P_\sigma^{-1} A P_\sigma = \begin{pmatrix} F & O \\ G & H \end{pmatrix}$$

où  $F$  et  $H$  sont des matrices appartenant respectivement à  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{N-p}(\mathbb{R})$  et  $O$  une matrice dont tous les éléments sont nuls.

### Question 1-2

a) Soit  $C \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  telle que  $C = \begin{pmatrix} F & O \\ G & H \end{pmatrix}$  où  $F$  et  $H$  appartiennent respectivement à  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{N-p}(\mathbb{R})$  et sont inversibles. Résoudre le système linéaire  $CX = U$  où  $X \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$  est la matrice des inconnues et  $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$  est donnée. On utilisera pour cela une décomposition convenable de  $X$  et de  $U$  en blocs  $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ .

b) On suppose que  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  est réductible. Proposer une méthode de résolution du système  $AX = U$ .

### Question 1-3

On veut montrer que  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  est irréductible si et seulement si la propriété (P) suivante est vérifiée :

(P) pour tout couple  $(i, j)$  d'indices distincts de  $W_N$ ,  $a_{ij} \neq 0$  ou alors il existe un entier  $s$  et des indices  $i_1, i_2, \dots, i_s$  tels que le produit  $a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s j}$  soit non nul.

a) Etablir que la condition est suffisante.

b) On suppose maintenant que  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  est irréductible. Pour chaque indice  $i \in W_N$ , on définit  $X_i$  comme l'ensemble des indices  $j$  de  $W_N$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) j \neq i \\ 2) \text{ soit } a_{ij} \neq 0 \\ \text{soit il existe } i_1, \dots, i_s \text{ tels que le produit } a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s j} \text{ soit différent de 0.} \end{array} \right.$$

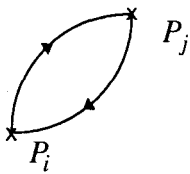
Montrer que  $X_i = W_N \setminus \{i\}$  et en déduire que la condition est nécessaire.

Tournez la page S.V.P.

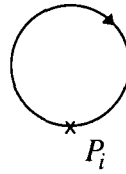
**Question 1-4**

Le concept d'irréductibilité peut être illustré graphiquement.

Soit  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ ,  $A = (a_{ij})$  et  $\{P_i \mid i \in W\}$  un ensemble de  $N$  points distincts du plan. Pour chaque couple  $(i, j) \in (W_N)^2$  tel que  $a_{ij} \neq 0$ , on trace une flèche allant du point  $P_i$  vers le point  $P_j$ . Si  $a_{ij}$  et  $a_{ji}$  sont non nuls, il y aura une flèche du point  $P_i$  vers le point  $P_j$  et une autre de  $P_j$  vers  $P_i$ . Si  $a_{ii} \neq 0$  on pourra tracer une boucle allant de  $P_i$  vers lui-même.



$a_{ij} \neq 0$  et  $a_{ji} \neq 0$



$a_{ii} \neq 0$

On associe ainsi à chaque matrice ce que l'on appelle un graphe orienté.

En étudiant les graphes associés aux deux matrices suivantes :

$$A_1 \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donner une interprétation graphique du caractère réductible ou irréductible de chacune d'elles.

**Deuxième partie****Question 2-1**

Soit  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  à diagonale fortement dominante ; soit  $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$  tel que  $AU = 0$

$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$  ; soit  $i$ , un indice tel que  $|u_i| = \max\{|u_1|, \dots, |u_N|\}$ . En considérant la  $i$ -ème ligne du

produit  $AU$  montrer que l'on a nécessairement  $U = 0$ . Que peut-on en déduire pour  $\det A$  ?

**Question 2-2**

On suppose que  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  est irréductible et à diagonale faiblement dominante.

a) Montrer qu'alors pour tout indice  $i \in W_N$ ,  $|a_{ii}| > 0$ .

- b) Montrer que  $\det A \neq 0$ . Pour cela, on raisonnera comme dans la question 2-1 et on montrera d'abord que si  $AU = 0$ , tous les éléments de la matrice colonne  $U$  sont nécessairement égaux en valeur absolue.

### **Question 2-3**

- a) Si  $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$  est une matrice dont les éléments diagonaux sont  $\geq 0$  et si, de plus, elle est à diagonale faiblement dominante, montrer que toutes les valeurs propres de  $A$  sont  $\geq 0$ .
- b) Si, de plus,  $A$  est irréductible ou inversible, on montrera que toutes les valeurs propres de  $A$  sont strictement positives.

### **Troisième partie**

#### Définition 5 :

Une matrice  $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$  est une  $L$ -matrice si :

- 1) pour tout indice  $i \in W_N$ , on a  $a_{ii} > 0$
- 2) pour tout couple d'indices  $(i, j) \in (W_N)^2$  tels que  $i \neq j$ , on a  $a_{ij} < 0$

#### Définition 6 :

Une matrice  $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$  est une  $S$ -matrice si :

- 1)  $A$  est définie positive,
- 2) pour tout couple d'indices  $(i, j) \in (W_N)^2$  tels que  $i \neq j$ , on a  $a_{ij} < 0$

#### Définition 7 :

Une matrice  $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$  est une  $M$ -matrice si :

- 1) pour tout couple d'indices  $(i, j) \in (W_N)^2$  tels que  $i \neq j$ , on a  $a_{ij} < 0$ ,
- 2)  $A$  est inversible,
- 3) tous les éléments de  $A^{-1}$  sont  $\geq 0$ .

### **Question 3-1**

- a) Soit  $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$  définie positive, montrer qu'alors  $a_{ii} > 0$  pour tout indice  $i \in W_N$ . En déduire que  $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$  est une  $S$ -matrice si et seulement si  $A$  est une  $L$ -matrice définie positive.
- b) Montrer que toute  $M$ -matrice est une  $L$ -matrice.

c) Montrer que si  $A \in S_N(\mathbb{R})$  est une  $L$ -matrice

1) irréductible,

2) à diagonale faiblement dominante,

alors  $A$  est une  $S$ -matrice.

### Question 3-2

Le spectre de  $Q$  est, par définition, l'ensemble des valeurs propres réelles ou complexes de  $Q$ .

$Sp(Q) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \det(Q - \lambda I_N) = 0\}$ . On appelle alors rayon spectral de  $Q$ ,  $S(Q) = \max_{\lambda \in Sp(Q)} |\lambda|$ .

a) Si  $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ , montrer que la série  $\sum_{k \geq 0} Q^k$  est convergente si et seulement si  $S(Q) < 1$ .

On admettra l'équivalence :  $Q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow S(Q) < 1$ .

Dans toute la suite de la question 3-2, on considère une  $L$ -matrice  $A$  d'ordre  $N$  et  $D$  la matrice diagonale ayant la même diagonale que  $A$ , donc définie par :

Pour tout couple d'indices  $(i, j) \in (W_N)^2$  tels que  $i \neq j$ , on a  $d_{ij} = 0$   
 Pour tout indice  $i \in W_N$ , on a  $d_{ii} = a_{ii}$

Soit  $C = (c_{ij})$  appartenant à  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ , telle que  $A = D - C$  et soit  $B = D^{-1}C$  (on justifiera l'existence de  $D^{-1}$ ).

On suppose que  $S(B) < 1$ .

b) Justifier le fait que  $I_N - B$  est inversible et montrer que tous les éléments de  $(I_N - B)^{-1}$  sont positifs ou nuls.

c) Montrer que  $A$  est inversible et que  $A$  est une  $M$ -matrice.

### Question 3-3

Si  $D$  est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, on définit  $D^{1/2}$  et  $D^{-1/2}$  matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont respectivement  $\sqrt{d_{ii}}$  et  $\frac{1}{\sqrt{d_{ii}}}$  pour tout indice  $i \in W_N$ .

Soit  $A$  une  $M$ -matrice.

On définit  $D$ ,  $C$ ,  $B$  comme à la question précédente et  $\hat{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  par  $\hat{A} = D^{-1/2} A D^{-1/2} = I_N - D^{-1/2} C D^{-1/2}$  et  $\hat{B} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  par  $\hat{B} = D^{1/2} B D^{-1/2}$ .

a) Montrer que  $\hat{A}$  est une  $M$ -matrice et que :

$$\left(\hat{A}\right)^{-1} = \left(I_N - \hat{B}\right)^{-1} = I_N + \hat{B} + \left(\hat{B}\right)^2 + \dots + \left(\hat{B}\right)^m + \left(I_N - \hat{B}\right)^{-1} \left(\hat{B}\right)^{m+1} \quad \text{pour tout entier } m \text{ strictement positif.}$$

b) Soit  $G_m \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  définie par :  $G_m = I_N + \hat{B} + \dots + \left(\hat{B}\right)^m$ . Montrer que tous les éléments de  $G_m$  sont positifs et majorés indépendamment de  $m$ .

c) En déduire que  $S(B) < 1$ .

### **Question 3-4**

Soit  $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$  une  $S$ -matrice.

On utilise les mêmes notations qu'en 3-2 et 3-3.

a) Montrer que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = (I_N - B)^{-1} D^{-1}$ .

b) On veut maintenant montrer que  $S(B) < 1$  ce qui suffira pour établir que toute  $S$ -matrice est une  $M$ -matrice.

b1) Montrer que  $\hat{A}$  est définie positive.

b2) En supposant  $S(B) \geq 1$ , montrer que l'on est conduit à une contradiction et que donc toute  $S$ -matrice est une  $M$ -matrice. On admettra que si  $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  a tous ses éléments positifs ou nuls, alors, il existe  $\mu \in Sp(Q)$  tel que  $\mu = S(Q)$ .

**Fin de l'énoncé.**

# C.C.P. MP Math 2 2000

## Partie 1 - Matrices réductibles ou irréductibles

### Question 1-1 -

a.1) Pour un vecteur de la base canonique :  $(e_1, \dots, e_N)$  de  $\mathbb{R}^N$

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad 1 \leq i \leq N \quad P_\sigma \times P_{\sigma'}(e_i) = P_\sigma(e_{\sigma'(i)}) = e_{\sigma\sigma'(i)} \quad \text{donc} \quad \boxed{P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma\sigma'}}$$

a.2) Pour  $\sigma' = \sigma^{-1}$  dans la relation précédente, puisque  $P_{Id_{W_N}} = I_N$  on a :  $\boxed{P_\sigma \times P_{\sigma^{-1}} = I_N}$

a.3) L'image de la base canonique par l'endomorphisme associé à  $P_\sigma$  est une base constituée des mêmes vecteurs dans un autre ordre (permutés par  $\sigma$ ).

C'est donc encore une base orthonormale pour le produit scalaire usuel.

$\boxed{P_\sigma}$  matrice de changement de bases orthonormales est donc orthogonale

Autre méthode :

$$\text{Calculons } ({}^t P_\sigma \times P_\sigma)_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq N} ({}^t P_\sigma)_{ik} (P_\sigma)_{kj} = \sum_{1 \leq k \leq N} (P_\sigma)_{ki} (P_\sigma)_{kj} = \sum_{1 \leq k \leq N} \delta_{k\sigma(i)} \delta_{k\sigma(j)}$$

Si  $k \neq \sigma(i)$  ou  $k \neq \sigma(j)$  le terme qu'on somme est nul. Il est donc nul pour  $i \neq j$  ( $\sigma$  injective)

$$\text{Pour } i = j \text{ il n'y a qu'un seul terme non nul dans la somme, qui vaut } 1. \quad \boxed{{}^t P_\sigma \times P_\sigma = I_N}$$

Une matrice de permutation est donc **orthogonale**.

b) On peut comme ci-dessus, calculer  $b_{ij}$  dans le produit des trois matrices.

Autre rédaction :

Appellons  $E_{ij}$  la matrice carrée élémentaire, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la  $i^{\text{ème}}$  ligne,  $j^{\text{ème}}$  colonne qui vaut 1. Alors  $\boxed{P_\sigma = \sum_{1 \leq j \leq N} E_{\sigma(j)j}}$

Avec les **opérations élémentaires** sur les lignes et les colonnes d'une matrice carrée  $M$  :

$$M \times E_{ij} \text{ correspond à } C_i \rightarrow C_j \quad \text{et} \quad E_{ij} \times M \text{ correspond à } L_j \rightarrow L_i$$

$$\text{Puisque : } P_{\sigma^{-1}} = \sum_{1 \leq j \leq N} E_{\sigma^{-1}(j)j} = \sum_{1 \leq i \leq N} E_{i\sigma(i)} \quad \text{en posant } j = \sigma(i) \text{ donc } i = \sigma^{-1}(j)$$

on a dans  $B = (P_\sigma)^{-1} \times A \times P_\sigma$  la superposition des opérations élémentaires :

$$\begin{array}{l} \text{Pour } j \text{ de } 1 \text{ à } N \quad C_{\sigma(j)} \rightarrow C_j \\ \text{Pour } i \text{ de } 1 \text{ à } N \quad L_{\sigma(i)} \rightarrow L_i \end{array} \quad \text{donc} \quad \boxed{\forall (i, j) \in (W_N)^2 \quad b_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}}$$

c) Si  $A$  est réductible :

il existe  $(S, T)$  de parties **non vides** de  $W_N$  formant une partition, telles que  $\begin{cases} \forall s \in S & a_{st} = 0 \\ \forall t \in T & a_{st} = 0 \end{cases}$

Considérons  $S$  et  $T$  ordonnées, et définissons une permutation  $\sigma$  envoyant chaque élément de  $\{1, \dots, N\}$  sur l'élément de même rang de  $(S, T)$  pris successivement dans l'ordre.

Si  $p = \text{card}(S)$   $\sigma(\{1, \dots, p\}) = S$  et  $\sigma(\{p+1, \dots, N\}) = T$

$$\text{Alors, dans } B = (P_\sigma)^{-1} \times A \times P_\sigma \quad \begin{cases} j \geq p+1 & \text{alors } \sigma(j) \in T \\ i \leq p & \text{alors } \sigma(i) \in S \end{cases} \quad \text{et } b_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)} = a_{st} = 0$$

$$\text{donc } B \text{ est décomposable en blocs : } B = \begin{pmatrix} F & 0_{p \times (N-p)} \\ G & H \end{pmatrix}$$

**Réciproquement** : si  $B$  a la forme indiquée et qu'on pose  $S = \sigma(\{1, \dots, p\})$  et  $T = \sigma(\{p+1, \dots, N\})$ ,

il constituent une partition de  $W_N$  et  $\begin{cases} \forall s \in S & a_{st} = a_{\sigma(i)\sigma(j)} = b_{ij} = 0 \\ \forall t \in T & a_{st} = a_{\sigma(i)\sigma(j)} = b_{ij} = 0 \end{cases}$  car  $i \leq p$  et  $j \geq p+1$

**Question 1-2** : Considérons  $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^{N-P}$

a) Ce qui revient à décomposer les matrices colonnes en blocs  $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$  où  $U_1 \in \mathbb{R}^P$  et  $U_2 \in \mathbb{R}^{N-P}$

$$\text{Alors } (C.X = U) \iff (F.X_1 = U_1 \text{ et } H.X_2 = U_2 - G.X_1) \iff \boxed{\begin{pmatrix} X_1 = F^{-1}.U_1 \\ X_2 = H^{-1}.[U_2 - G.X_1] \end{pmatrix}}$$

b) Si  $A$  est réductible et inversible,  $\det((P_\sigma)^{-1} \times A \times P_\sigma) = \det(A)$

donc  $B$  décomposable en blocs a des blocs inversibles sur la diagonale.

On peut donc résoudre le système en résolvant deux systèmes **plus petits** en taille, on détermine  $S$  et  $T$  puis  $F$  et  $H$  et leurs inverses.

Note :

$\det(P_\sigma) = \pm 1$  puisqu'elle est orthogonale, on peut même assurer que  $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$   
où  $\varepsilon(\sigma)$  est la signature de la permutation  $\sigma$ , puisque le déterminant est une forme antisymétrique,  
et qu'il vaut 1 sur la base canonique

**Question 1-3** : On va montrer que  $A$  est réductible si et seulement si  $\text{non}(P)$  est vraie



a) Si  $A$  est réductible : il existe  $(S, T)$  partition de  $W_N$ , telle que  $\begin{cases} \forall i \in S & a_{ij} = 0 \\ \forall j \in T & a_{ij} = 0 \end{cases}$

Il existe donc  $(i, j) \in W_N^2$  ( on le prend dans  $S \times T$  qui est non vide car  $S$  et  $T$  non vides )

tel que  $\begin{cases} a_{ij} = 0 \\ \text{et quelque soit } s \in W_N \text{ et la suite d'indices } i_1, i_2, \dots, i_s \text{ le produit } a_{i_1 i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_s j} = 0 \end{cases}$

En effet si le produit est non nul, chacun des termes est non nul donc successivement :

avec  $i \in S$  et  $a_{i i_1} \neq 0$   $i_1 \notin T$  donc  $i_1 \in S$ ,

puis  $i_1 \in S$  et  $a_{i_1 i_2} \neq 0$   $i_2 \notin T$  donc  $i_2 \in S$ , etc jusqu'à  $j \in S$ , or  $j \in T$  : **absurde**.

D'où  $\text{non}(P)$  est vraie : la condition  $(P)$  est suffisante pour assurer  $A$  irréductible.

b) Si  $A$  est irréductible, suivant l'énoncé posons, pour  $i$  momentanément fixé

$$X_i = \left\{ j \in W_N \quad j \neq i \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{ij} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \exists s \geq 1 \\ \exists (i_1, i_2, \dots, i_s), a_{i i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_s j} \neq 0 \end{cases} \right\}$$

Lemme : Montrons que si pour un  $i$  fixé  $\forall j \neq i \quad a_{ij} = 0$  alors  $A$  est réductible

Si  $\forall j \neq i \quad a_{ij} = 0$  alors la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$  vaut :  $L_i = (0 \dots 0 \ a_{ii} \ 0 \dots 0)$

avec  $\sigma = \tau_{1i}$  transposition échangeant 1 et  $i$

on a  $B = (P_\sigma)^{-1} \times A \times P_\sigma = \begin{pmatrix} a_{ii} & 0 & \dots & 0 \\ G & & H & \end{pmatrix}$  donc  $A$  est **réductible**.

Donc **par l'absurde** :  $X_i \neq \emptyset$  Enfin  $i$  est dans le complémentaire de  $X_i$   $i \notin X_i$

**Supposons**  $X_i \neq W_N \setminus \{i\}$  et considérons  $S = X_i \cup \{i\}$  et  $T = W_N \setminus S$

C'est une partition de  $W_N$  constituée de parties non vides.

Pour  $\begin{cases} k \in S = X_i \cup \{i\} \\ l \in T \end{cases}$  supposons  $a_{kl} \neq 0$

1<sup>er</sup> cas :  $k = i$  alors  $(a_{il} \neq 0) \implies (l \in X_i)$

2<sup>ème</sup> cas :  $k \in X_i$  on a deux sous-cas :

$\begin{cases} \text{si } a_{ik} \neq 0 \text{ alors } a_{ik} \cdot a_{kl} \neq 0 \text{ donc } l \in X_i \\ \text{si } \exists (i_1, i_2, \dots, i_s) \ a_{i i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_s k} \neq 0 \text{ alors } a_{i i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_s k} a_{kl} \neq 0 \text{ donc } l \in X_i \end{cases}$

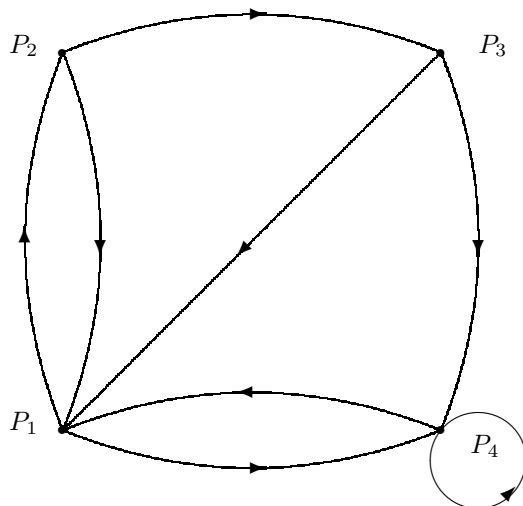
La conséquence est dans tous les cas contraire à l'hypothèse, donc  $\begin{cases} \forall k \in S \\ \forall l \in T \end{cases} a_{kl} = 0$

Mais alors  $A$  serait **réductible**, ce qui n'est pas. Donc :  $\forall i \in W_N \quad X_i = W_N \setminus \{i\}$

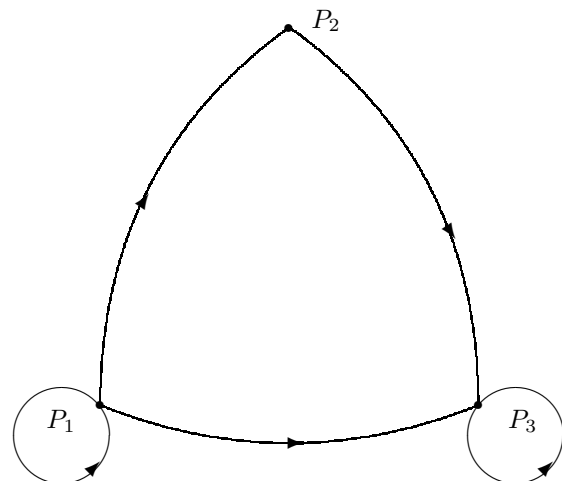
Ainsi  $(P)$  est vraie, car pour  $j \neq i \quad j \in X_i$

**Question 1-4** : La traduction graphique de  $(P)$  est : pour tout couple de points **distincts**  $(P_i, P_j)$

- il existe une flèche joignant  $P_i$  à  $P_j$
- ou il existe un chemin orienté, succession de flèches allant de  $P_i$  à  $P_j$  en passant par  $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_s}$



Graphe de la matrice  $A_1$



Graphe de la matrice  $A_2$

On constate ainsi que  $A_1$  est irréductible et  $A_2$  est réductible.

Note : les bouclettes correspondant à  $a_{ii} \neq 0$  sont ici sans signification.

## Partie 2 - Matrices à diagonales dominantes

### Question 2-1 : Un théorème d'Hadamard

Supposons  $U \neq 0$  et  $i_0$  un entier tel que :  $|u_{i_0}| = \max\{|u_1|, \dots, |u_N|\}$

Alors  $|u_{i_0}| \neq 0$ , et avec la  $i_0^{\text{ème}}$  composante de  $A.U = 0$  on a :  $\sum_{1 \leq j \leq N} a_{i_0 j} u_j = 0$

$$\text{d'où l'on tire : } a_{i_0 i_0} u_{i_0} = - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} u_j$$

$$\text{et donc : } |a_{i_0 i_0}| = \frac{1}{|u_{i_0}|} \left| \sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} u_j \right| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \frac{|u_j|}{|u_{i_0}|} \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}|$$

Ce qui est exclu pour  $A$  à diagonale **strictement dominante**.

Ainsi  $(A.U = 0) \implies (U = 0)$  donc  $\boxed{\text{Ker}(A) = \{0\}}$

Un endomorphisme **injectif** en dimension finie est bijectif d'où  $\boxed{\det(A) \neq 0}$

### Question 2-2 :

a) Pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$  on a  $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$  ( diagonale faiblement dominante )

Donc  $(a_{ii} = 0) \implies (\forall j \neq i \quad a_{ij} = 0)$  ce qui ( voir le Lemme question 1-3 b)) entraine  $A$  réductible.

Ainsi :  $\boxed{\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad |a_{ii}| > 0}$

b) Avec les mêmes notations qu'en 2-1,  $\boxed{\text{supposant } U \neq 0}$

Puisque la diagonale est faiblement dominante :

$$\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \leq |a_{i_0 i_0}| = \frac{1}{|u_{i_0}|} \left| \sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} u_j \right| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \frac{|u_j|}{|u_{i_0}|} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \left[ 1 - \frac{|u_j|}{|u_{i_0}|} \right] \leq 0}$$

Or tous ces termes sont positifs ou nuls. Il sont donc **tous nuls**.

Soit  $S = \{i \in \{1, \dots, N\} \mid |u_i| = |u_{i_0}|\}$  et  $T = \{j \in \{1, \dots, N\} \mid |u_j| < |u_{i_0}|\}$  son complémentaire.

$$\boxed{\forall (i, j) \in S \times T} \quad \text{on retrouve} \quad \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \leq |a_{ii}| = \frac{1}{|u_{i_0}|} \left| \sum_{k \neq i} a_{ik} u_k \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ik}| \frac{|u_k|}{|u_{i_0}|}$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \left[ 1 - \frac{|u_k|}{|u_i|} \right] \leq 0 \quad \text{et} \quad \forall k \neq i \quad |a_{ik}| \left[ 1 - \frac{|u_k|}{|u_i|} \right] = 0 \quad \text{pour } j \in T \quad \text{alors} \quad \boxed{a_{ij} = 0}$$

Si  $S$  et  $T$  sont non vides, cela entraine  $A$  réductible. Ce qu'on a exclu.

Mais  $S \neq \emptyset$  car  $i_0 \in S$  donc  $T = \emptyset$  et  $\boxed{S = \{i \in \{1, \dots, N\} \mid |u_i| = |u_{i_0}|\} = \{1, \dots, N\}}$

Tous les coefficients de la colonne  $U$  sont égaux en valeurs absolues.

Enfin pour l'**indice**  $i$  tel que  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

$$\text{on retrouve} \quad |a_{ii}| = \frac{1}{|u_{i_0}|} \left| \sum_{k \neq i} a_{ik} u_k \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ik}| \frac{|u_k|}{|u_{i_0}|} = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \left. \vphantom{\sum_{k \neq i} a_{ik} u_k} \right\} \text{ce qui est impossible}$$

Donc  $\boxed{U = 0}$  et comme précédemment  $A$  est injective et  $\boxed{\det(A) \neq 0}$

### Question 2-3 : Cas particuliers d'un résultat de Gerschgorin

a)  $A$  **symétrique et réelle** est donc diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  par matrice diagonalisante orthogonale.

Son polynôme caractéristique admet  $N$  racines réelles comptées avec leurs multiplicités.

Soit  $\lambda \in Sp(A) \subset \mathbb{R}$ ,  $U \neq 0$  un vecteur propre associé et  $i_0$  tel que :  $|u_{i_0}| = \max\{|u_1|, \dots, |u_N|\}$

$$\text{on retrouve : } (a_{i_0 i_0} - \lambda) u_{i_0} = - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} u_j \quad \text{d'où :} \quad \boxed{|a_{i_0 i_0} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}|}$$

Or par faible dominance :  $\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \leq |a_{i_0 i_0}| = a_{i_0 i_0}$  qui est un réel positif

donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $(|a_{i_0 i_0} - \lambda| \leq a_{i_0 i_0}) \implies \boxed{(\lambda \in [0, 2 a_{i_0 i_0}])}$

Toutes les valeurs propres sont donc des réels positifs :  $A$  est **positive**.

b) On a vu : ( irréductible et à diagonale faiblement dominante )  $\implies$  ( inversible )

Si  $A$  est inversible :  $\det(A) \neq 0$  et c'est le produit des valeurs propres : elles sont donc non nulles.

$$\left. \begin{array}{l} A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \text{ telle que } \forall i \in W_N \quad a_{ii} \geq 0, \text{ à diagonale} \\ \text{faiblement dominante et irréductible ou inversible} \end{array} \right\} \implies \boxed{A \text{ symétrique définie positive}}$$

**Question 3-1 :**

a) Pour  $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$  et **définie positive**,  $\forall v \neq 0 \quad (Av | v) > 0$

Résultat du cours :

$A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}^N$  par changement de bases orthonormales pour le produit scalaire usuel, passant de la base canonique à une base  $(u_1, \dots, u_N)$  de vecteurs propres.

Pour  $A$  de plus définie positive, les valeurs propres  $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq N}$  sont strictement positives.

Pour tout vecteur  $v \neq 0$ , en le décomposant sur  $(u_1, \dots, u_N)$  :  $v = \sum_{1 \leq j \leq N} x_j u_j$

$$\text{ainsi } Av = \sum_{1 \leq j \leq N} x_j Au_j = \sum_{1 \leq j \leq N} x_j \lambda_j u_j \text{ et donc } (Av | v) = \sum_{1 \leq j \leq N} \lambda_j (x_j)^2$$

Pour  $v = e_i$  de la base canonique :  $Ae_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  et donc

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (Ae_i | e_i) = a_{ii} > 0$$

La propriété (2) se conservant :  $(A \text{ est une } S\text{-matrice}) \iff (A \text{ est une } L\text{-matrice, définie positive})$

b) Si  $A$  est une  $M$ -matrice, alors  $\forall (i, j) \in W_N^2$  tels que  $i \neq j$ , on a  $a_{ij} < 0$  donc (2)

Notons  $R = A^{-1}$  alors  $\forall (i, j) \quad r_{ij} \geq 0$  et  $A.R = I_N$

d'où  $(A.R)_{ii} = 1 = \sum_{1 \leq j \leq N} a_{ij} r_{ji}$  ainsi :  $a_{ii} r_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} a_{ij} r_{ji} \geq 1$  ( $a_{ij} \leq 0 \quad r_{ij} \geq 0$ )

donc  $a_{ii} r_{ii} \geq 1$  ce qui entraîne  $a_{ii} > 0$  d'où la propriété (1) :  $\forall i \in W_N \quad a_{ii} > 0$

$$(A \text{ est une } M\text{-matrice}) \iff (A \text{ est une } L\text{-matrice})$$

c) Puisqu'on a (2), il suffit de montrer que  $A$  est définie positive.

On applique la **question 2-3** : une  $L$ -matrice à diagonale faiblement dominante a des valeurs propres positives, et si elle est irréductible, strictement positives.

**Question 3-2** Par convention, pour toute matrice carrée :  $A^0 = I_N$

a) On admet :  $(S(Q) < 1) \iff (Q^n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty)$

Par commutabilité de  $I_N$  et  $Q$  on a :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left[ \sum_{0 \leq k \leq n} Q^k \right] (I_N - Q) = I_N - Q^{n+1}$

et  $S(Q) < 1$  donc  $1 \notin Sp(Q)$  ainsi  $\det(I_N - Q) \neq 0$  et  $\sum_{0 \leq k \leq n} Q^k = (I_N - Q^{n+1})(I_N - Q)^{-1}$

$$\text{d'où : } (S(Q) < 1) \implies \left( \text{la série } \sum Q^k \text{ est convergente de somme totale } (I_N - Q)^{-1} \right)$$

Réciproquement : si la série de matrices converge, la suite associée tend vers 0 (condition usuelle de convergence avec  $Q^n$  différence de deux sommes partielles) donc  $S(Q) < 1$

D'où l'équivalence.

b)  $A$  est une  $L$ -matrice, donc  $\forall i \in W_N \quad a_{ii} > 0$  et  $\det(D) = \prod_{0 \leq i \leq n} a_{ii} > 0$

$$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{ii}}\right) \quad \text{Si on pose } B = D^{-1}.C \text{ avec } A = D - C \text{ alors } A = D.(I_N - B)$$

On suppose :  $S(B) < 1$ , avec la question précédente :  $\left[ \sum_{0 \leq k} B^k \right] (I_N - B) = I_N$

$$\text{et } (I_N - B) \text{ est inversible, avec } (I_N - B)^{-1} = \sum_{0 \leq k} B^k$$

$B$  est à coefficients positifs, comme  $D^{-1}$  et  $C$ , donc  $\forall k \in N \quad B^k$  est à coefficients positifs, par somme et passage à la limite composante par composante :

$$\text{tous les éléments de } (I_N - B)^{-1} \text{ sont positifs ou nuls}$$

c)  $A = D.(I_N - B)$  est donc **inversible** et  $A^{-1} = (I_N - B)^{-1} D^{-1}$  a donc tous ses éléments  $\geq 0$

$$(A \text{ est une } L\text{-matrice et } S(B) < 1) \implies (A \text{ est une } M\text{-matrice})$$

**Question 3-3 :**

a)  $\det(D) = \prod_{0 \leq i \leq n} a_{ii} > 0$  et  $\det(D^{-\frac{1}{2}}) = \prod_{0 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$  donc  $A$  et  $D^{-\frac{1}{2}}$  sont inversibles :  $\hat{A}$  est

**inversible** et  $(\hat{A})^{-1} = D^{\frac{1}{2}}.A^{-1}.D^{\frac{1}{2}}$  est à coefficients **positifs ou nuls**.

$\hat{A}_{ij}$  peut se calculer avec le produit des trois matrices, dont deux diagonales,

ou avec  $\widehat{A}_{ij} = (\widehat{A}e_j | e_i) = (AD^{-\frac{1}{2}}e_j | D^{-\frac{1}{2}}e_i)$  puisque la matrice  $D^{-\frac{1}{2}}$  est symétrique dans une base orthonormale, l'endomorphisme est autoadjoint.

$$\forall (i, j) \quad \widehat{A}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \frac{1}{\sqrt{a_{jj}}} a_{ij} \quad \text{en particulier} \quad \widehat{A}_{ii} = 1 \quad \text{et} \quad (i \neq j) \implies \widehat{A}_{ij} < 0$$

Donc :  $\widehat{A}$  est une  $M$ -matrice et la partie diagonale de  $\widehat{A}$  est  $\widehat{D} = I_N$

De plus :  $\widehat{A} = D^{-\frac{1}{2}} \cdot A \cdot D^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}} \cdot [D \cdot (I_N - B)] \cdot D^{-\frac{1}{2}} = I_N - D^{\frac{1}{2}} \cdot B \cdot D^{-\frac{1}{2}}$

la décomposition  $\widehat{A} = I_N - \widehat{B}$  est la décomposition du **3-2 a)** appliquée à  $\widehat{A}$

On retrouve que :  $\forall m \in \mathbb{N} \quad I_N = (I_N - \widehat{B}) \left[ \sum_{0 \leq k \leq m} \widehat{B}^k \right] + \widehat{B}^{m+1}$

et on peut multiplier à gauche par  $(I_N - \widehat{B})^{-1}$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (\widehat{A})^{-1} = (I_N - \widehat{B})^{-1} = \left[ \sum_{0 \leq k \leq m} \widehat{B}^k \right] + (I_N - \widehat{B})^{-1} \cdot \widehat{B}^{m+1}$$

b)  $\widehat{B} = D^{\frac{1}{2}} \cdot B \cdot D^{-\frac{1}{2}}$  produit de matrices à coefficients positifs, est aussi à coefficients positifs.

rappel :  $(i \neq j) \implies (a_{ij} < 0)$  donc  $\forall (i, j) \quad c_{ij} \geq 0$  et  $b_{ij} \geq 0$

De même ses puissances successives et leur somme : tous les éléments de  $G_m$  sont  $\geq 0$

De plus :  $G_m = (\widehat{A})^{-1} - (\widehat{A})^{-1} \cdot \widehat{B}^{m+1}$  et les coefficients de cette dernière étant positifs,

on peut noter :  $G_m \ll (\widehat{A})^{-1}$  au sens où coefficient par coefficient :  $[G_m]_{ij} \leq [(\widehat{A})^{-1}]_{ij}$

c) Pour tout  $(i, j)$  fixé, on a donc une suite de réels croissante et majorée : elle converge dans  $\mathbb{R}$ .

La suite  $(G_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est convergente, la série  $\sum \widehat{B}^k$  est convergente, donc avec **3-2 a)**  $S(\widehat{B}) < 1$

Mais  $B$  et  $\widehat{B}$  sont **semblables** (avec la matrice de passage  $D^{\frac{1}{2}}$ ) donc ont même spectre :  $S(B) < 1$

Avec **3-1 b)**, **3-2 c)** et **3-3 c)** :  $(A \text{ est une } L\text{-matrice et } S(B) < 1) \iff (A \text{ est une } M\text{-matrice})$

#### Question 3-4 :

a) Si  $A$  est une  $S$ -matrice, elle est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ , à valeurs propres strictement positives, donc  $\det(A) > 0$  (produit des valeurs propres du polynôme caractéristique scindé)

Avec **3-1 a)** :  $A$  est une  $L$ -matrice, donc  $\forall i \in W_N \quad a_{ii} > 0$  et  $\det(D) = \prod_{0 \leq i \leq n} a_{ii} > 0$

Puisque  $A = D \cdot (I_N - B)$  on obtient :  $(I_N - B)$  inversible, et  $A^{-1} = (I_N - B)^{-1} \cdot D^{-1}$

b1)  $\widehat{A}$  et  $A$  sont **congruentes** donc représentent la même forme quadratique dans deux bases différentes : elles sont simultanément définies positives.

On peut détailler, mais c'est superflu :

$\widehat{A}$  est dans  $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ , donc a  $N$  valeurs propres réelles, comptées avec leurs multiplicités.

Soit  $v \neq 0$  un vecteur propre associé à  $\lambda$  :

$$(\widehat{A}v = \lambda v) \implies (A \cdot D^{-\frac{1}{2}}v = \lambda D^{\frac{1}{2}}v) \implies (Aw = \lambda Dw \text{ en posant } w = D^{\frac{1}{2}}v \neq 0)$$

mais pour  $w \neq 0 \quad (Aw | w) > 0$  donc  $(\lambda Dw | w) = \lambda \left[ \sum_{1 \leq i \leq N} a_{ii} w_i^2 \right] > 0$

ainsi toutes les valeurs propres  $\lambda$  de  $\widehat{A}$  sont strictement positives

b2) On admet que si  $Q \geq 0$  alors il existe  $\mu \in Sp(Q)$  tel que  $\mu = S(Q)$ . C'est donc le cas pour  $B$  : il existe  $\mu \geq 1$  valeur propre de  $B$  donc de  $\widehat{B}$  (semblables)

Mais  $\widehat{A} = I_N - \widehat{B}$  donc  $\lambda = (1 - \mu) \leq 0$  est une valeur propre de  $\widehat{A}$ . Ce qui contredit **3-4 b1)**.

Donc  $S(B) < 1$  et avec **3-1 a)** :

$(A \text{ est une } S\text{-matrice}) \implies (A \text{ est une } L\text{-matrice, définie positive et } S(B) < 1)$

D'où, avec **3-2 c)** :  $(A \text{ est une } S\text{-matrice}) \implies (A \text{ est une } M\text{-matrice})$ .