My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

DM (EV. Préhilbertiens)

Centrales 2013

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathrm{O}(n)$ le groupe orthogonal d'ordre n ;
- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles, respectivement strictement positives ;
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ sa matrice transposée, $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace, et, pour $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$, m_{ij} le coefficient qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme définie, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par $\|M\| = \sup(|m_{ij}|, (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2)$.

I Décomposition polaire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

I.A – On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

I.A.1) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que u est autoadjoint défini positif si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.A.2) Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors S est inversible et $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.B – Dans cette question, u désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint défini positif. On se propose de démontrer qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint, défini positif, tel que $v^2 = u$.

I.B.1) Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, autoadjoint défini positif et vérifiant $v^2 = u$, et soit λ une valeur propre de u. Montrer que v induit un endomorphisme de $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ que l'on déterminera.

I.B.2) En déduire v, puis conclure.

I.B.3) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $v = Q(u)$.

I.C – Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

I.C.1) Montrer que ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.C.2) En déduire qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathrm{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

I.C.3) Déterminer les matrices O et S lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

I.D –

I.D.1) Montrer que $\mathrm{O}(n)$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.D.2) Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.D.3) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.D.4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(O, S) \in \mathrm{O}(n) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. Un tel couple est-il unique ?

I.E – Soit φ l'application de $\mathrm{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(O, S) = OS$ pour tout couple (O, S) de $\mathrm{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrer que φ est bijective, continue et que sa réciproque est continue.

II Deux applications

II.A – ***Première application***

Dans cette partie, A et B désignent deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice U carrée de taille n, inversible, à coefficients complexes, telle que $U\,{}^t\overline{U} = I_n$ et $A = UBU^{-1}$, où $\overline{U}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de U.

II.A.1) Justifier que ${}^tA = U({}^tB)U^{-1}$.

II.A.2) On se propose de montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P\,{}^tBP^{-1}$. Pour cela, on note X et Y les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $U = X + \mathrm{i}Y$.

a) Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $X + \mu Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $AX = XB$ et $AY = YB$.

c) Conclure.

II.A.3) On écrit P sous la forme $P = OS$, avec $O \in \mathrm{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $BS^2 = S^2B$, puis que $BS = SB$.

b) En déduire qu'il existe $O \in \mathrm{O}(n)$ tel que $A = OB{}^tO$.

II.B – ***Seconde application***

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ au système

$$(*) : \begin{cases} {}^tAA + {}^tXX = I_n \\ {}^tAX - {}^tXA = 0_n \end{cases}$$

II.B.1) Montrer que si le système $(*)$ admet une solution dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de ${}^tAA$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$.

II.B.2) On suppose dans cette question que les valeurs propres de ${}^tAA$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$.

a) Justifier que l'on peut chercher les solutions X de $(*)$ sous la forme $X = UH$, avec $U \in \mathrm{O}(n)$ et $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

b) Déterminer H.

c) Montrer l'existence d'une solution $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de $(*)$ appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

III Valeurs propres d'une matrice

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

On note P_p le polynôme tel que, pour tout réel x, $P_p(x) = \det(xI_p - A_p)$.

III.A – Montrer qu'à $x \in \mathbb{R}$ fixé, la suite $(P_p(x))_{p\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation linéaire d'ordre 2, que l'on précisera.

III.B – Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2-x| < 2$. Après avoir justifié l'existence d'un unique $\theta \in \,]0,\pi[$ tel que $2-x = 2\cos\theta$, déterminer $P_p(x)$ en fonction de $\sin((p+1)\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

III.C – Déterminer les valeurs propres de A_p.

III.D – Montrer que A_p est diagonalisable, et en déterminer une base de vecteurs propres, en précisant pour chacun la valeur propre associée.

IV

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

IV.A – Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.
Dans la suite, A désigne la matrice définie dans cette ***question IV.A****.*

IV.B –

IV.B.1) Justifier l'existence de $M_n = \sup(\{f(O), O \in \mathrm{O}(n)\})$.

IV.B.2) Justifier que ${}^tAA$ admet n valeurs propres positives $\mu_1, \ldots, \mu_n$, comptées avec multiplicités.

IV.B.3) Montrer que $M_n = \sup(\{\mathrm{Tr}(D\Omega), \Omega \in \mathrm{O}(n)\})$, où D est la matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont $\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_n}$.

IV.B.4) En déduire que $M_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k}$.

IV.C – Dans cette question, f désigne la forme linéaire définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} m_{i,j}$.

IV.C.1) Déterminer la matrice A telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = Tr(AM)$.

IV.C.2) Montrer que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.C.3) Déterminer les valeurs propres de $A^{-1}\ {}^tA^{-1}$.

IV.C.4) Montrer que $M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\cos\dfrac{k\pi}{2n+1}}$.

IV.C.5) Donner un équivalent de M_n lorsque n tend vers $+\infty$.

• • • FIN • • •

I-Décomposition polaire d'un endomorphisme de R^n

I-A I-A-1) Montrons que u est autoadjoint, si, et seulement si sa matrice est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

Soit $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $A = (a_{i,j})_{i,j}$ sa matrice dans dans la base $\mathcal{B}$ et notons $< .,. >$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

. u est autoadjoint $\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n, < u(x), y >=< x, u(y) > \iff$
$\iff \forall i, j \in [[1, n]] < u(e_j), e_i >=< e_j, u(e_i) > \iff a_{i,j} = a_{j,i} \iff A = {}^tA$.

. Supposons que u est défini positif, et soit $\lambda \in Sp(A)$ alors, $\exists x \in \mathbb{R}^*$ tel que $u(x) = \lambda x$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^n, < u(x), x >= \lambda\|x\|^2 \; > 0$, donc $\lambda > 0$.

. Supposons que $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$ et choisissons grâce au théorème spectral une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de vecteurs propres de f, alors $\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_i e_i$ non nul (prenons par exemple $x_j \neq 0$) on a $< u(x), x >= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geq \lambda_j x_j^2 > 0$.

I-A-2) Montrons que si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $Sp(S) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $det(S) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k > 0$, d'où S est inversible, de plus si u est son endomomorphisme canonique associé, alors
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, < u^{-1}(x), (y) >=< u^{-1}(x), u(u^{-1}(y)) >=< u(u^{-1}(x)), u^{-1}(y) >=< x, u^{-1}(y) >$, donc u^{-1} est symétrique et puisque $Sp(u^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}_+^*$, $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

I-B I-B-1) v induit un endomorphisme de $Ker(u - \lambda id)$

. L'égalité $v^2 = u$ entraine que $uov = v^2ov = vov^2 = vou$, donc $Ker(u - \lambda id)$ est stable par v, c'est à dire v induit un endomorphisme de $Ker(u - \lambda id)$.

. $\lambda > 0$, donc $X - \sqrt{\lambda}$ et $X + \sqrt{\lambda}$ sont premiers entre eux, et le théorème de décomposition des noyaux entraine que $Ker(u-\lambda id) = Ker(v^2-\lambda id) = Ker(v-\sqrt{\lambda}id) \oplus Ker(v-\sqrt{\lambda}id)$, or v est défini positif, donc $Ker(v + \sqrt{\lambda}id) = \{0\}$, ce qui entraine que $Ker(u - \lambda id) = Ker(v - \sqrt{\lambda}id)$, donc $v = \sqrt{\lambda}id_{Ker(u-\lambda id)}$.

I-B-2) Expression de v et conclusion

. Soit $\lambda \in Sp(u)$ et p_λ la projection sur $Ker(u - \lambda id)$ parallélement à $\bigoplus_{\mu \neq \lambda} Ker(u - \mu id)$, alors $u = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \lambda p_\lambda$ et par suite $v = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \sqrt{\lambda} p_\lambda$, ce qui traduit que si v existe, il est unique.

. Si v est donné par l'égalité précédente, alors $\forall x \in Ker(u - \lambda id), v(x) = \sqrt{\lambda}x$, donc $v^2 = u$ sur chaque sous-espace $Ker(u - \lambda id)$ et puisque $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} Ker(u - \lambda id)$, on aura $v^2 = u$ sur $\mathbb{R}^n$.

. Soient $x = \sum_{k=1}^{n} x_k, y = \sum_{k=1}^{n} y_k$ les décompositions de $x, y \in \mathbb{R}$ dans la somme directe orthogonale $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^{n} Ker(u - \lambda_k id)$, alors $< v(x), y >= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k} < x_k, y_k >= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k} < y_k, x_k >=< x, v(y) >$ de plus si x est non nul, il existe $j \in [[1, n]]$ tel que $x_j \neq 0$, donc
$< v(x), x >= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k}\|x_k\|^2 \geq \lambda_j\|x_j\|^2 > 0$, ce qui montre que v est symétrique défini positif.

I-B-3) v est un polynôme en u

. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres distinctes deux à deux de u, alors il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $\forall k \in [[1, p]], Q(\lambda_k) = Q(\sqrt{\lambda_k})$ à savoir $Q = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{\lambda_k} L_k$ où $L_1, ..., L_p$ les polynômes de Lagrange donnés par $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - \lambda_j}{x_i - x_j}$.

On peut aussi justifier l'existence de Q grâce à l'automorphisme $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ P & \longmapsto & (P(\lambda_1), ..., P(\lambda_p)) \end{array}$

. On a $v = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \sqrt{\lambda} p_\lambda = \sum_{\lambda \in Sp(u)} Q(\lambda) p_\lambda = Q(\sum_{\lambda \in Sp(u)} \lambda p_\lambda) = Q(u)$.

I-C I-C-1) ^tAA est symétrique définie positive

Soit u l'endomorphisme canonique associé à A, alors $(f^* of)^* = f^* o(f^*)^* = f^* of$, donc f est autoadjoint, de plus f inversible ($A \in GL_n(\mathbb{R})$), et par suite $\forall x \in \mathbb{R}^n$ non nul, $f(x)$ est aussi non nul et on a $< f^* of(x), x >=< f(x), f(x) >= \|f(x)\|^2 > 0$, ce qui entraine que $f^* of$ est autoadjoint défini positif, c'est à dire $^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

I-C-2) Décomposition polaire

. $^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et la traduction matricielle de $I-B$ assure l'existence d'une matrice unique $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $S^2 = {}^tAA$.
On pose $O = AS^{-1}$, alors d'après $(I - A - 2)$ $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc
${}^tOO = {}^tS^{-1}{}^tAAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$, et par suite $O \in O(n)$, ce qui assure l'existence.
. Si on a deux décompositions $A = OS = O'S'$, alors ${}^tAA = S^2 = S'^2$, donc $(S - S')(S + S') = O_n$, or ${}^t(S+S') = {}^tS+{}^tS' = S+S'$ et si u, v sont les endomorphismes canoniques associés respectivement à S et S', alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$ non nul,$< (u+v)(x), x >=< u(x), x > + < v(x), x > > 0$, donc $S+S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et par suite $S + S' \in GL_n(\mathbb{R})$, ce qui entraine que $S - S' = O_n$, d'où l'unicité.

I-C-3) Un cas particulier de décomposition polaire

${}^tAA = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 36 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, on vérifie que $Sp({}^tAA) = \{16, 36, 4\}$ et $A = PD{}^tP$ avec

$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $D = diag(16, 36, 4)$, donc $S = Pdiag(4, 6, 2){}^tP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

et par suite $O = AS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$

I-D I-D-1) $O(n)$ est une partie compacte

. L'application $\begin{array}{cccc} \varphi : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & {}^tMM \end{array}$ est à composantes polynômiales en les coéfficients de M, donc continue et par suite $O(n) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ est image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue φ, donc $O(n)$ est un fermé.

. Soit $M = (m_{i,j})_{i,j} \in O(n)$, alors $\forall j \in [[1, n]]$, $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 = 1$, donc $\forall i, j \in [[1, n]]$, $|m_{i,j}| \leq 1$, et par suite $\|M\| = \sup_{1 \leq i,j \leq n} (|m_{i,j}|) \leq 1$, d'où $O(n)$ est une partie bornée.

. $O(n)$ est une partie fermée bornée en dimension finie, donc $O(n)$ est un compact.

I-D-2) $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé

. $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension finie $\frac{n(n+1)}{2}$, donc c'est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.
. Soit $(A_m)_m$ une suite de matrices de $O(n)$ convergente vers $A \in S_n(\mathbb{R})$ et soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.
L'application $\begin{array}{cccc} \varphi_X & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & M & \longmapsto & < MX, X >= {}^tXMX \end{array}$ est polynômiale en les coordonées de X, donc elle est continue, or $(A_m)_m$ converge vers A, et par continuité de φ_X, on aura $(\varphi_X(A_m))_m$ converge vers $\varphi_X(A)$ et puisque $\forall m \in \mathbb{N}, \varphi_X(A_m) \geq 0$, on obtient $\varphi_X(A) \geq 0$, c'est à dire
$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), < AX, X > \geq 0$, ce qui traduit que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

I-D-3) $GL_n(\mathbb{R})$ est une partie dense

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on sait que $card(Sp(A)) < +\infty$, donc $\exists n_0$ tel que $\forall m \geq n_0 \in \mathbb{N}, A_m = A - \frac{1}{m}I_n$ est inversible, de plus $\|A_m - A\| = \frac{1}{m}\|I_n\| = \frac{1}{m}$ tend vers 0, lorsque m tend vers $+\infty$, ce qui entraine que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de $GL_n(\mathbb{R})$.

I-D-4) Une décomposition polaire qui n'est pas unique

. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors d'après la question précédente, $\exists (A_m)_m \subset GL_n(\mathbb{R})$ convergente vers A, et par la question $(I - C - 2)$, $\exists!(O_m, S_m)_m \subset O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A_m = O_mS_m$.
. $O(n)$ étant compact, donc on peut extraire de $(O_m)_m$ une sous suite $(O_{\varphi(m)})_m$ convergente vers un élément $O \in O(n)$, et par continuité du produit matriciel, la suite $(S_{\varphi(m)})_m = ({}^tO_{\varphi(m)}A_{\varphi(m)})_m$ converge vers $S = {}^tOA$, or d'après la question $(I - D - 2)$, $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$, donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et ona bien $A = OS$.

. Soit $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, on a $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

I-E φ **est un homéomorphisme**

. La question $(I-C-2)$ assure que $\forall A\in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists!(O,S)\in O(n)\times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $A=OS$, donc φ est bijective.
. φ est continue comme restriction d'une application continue, à savoir le produit matriciel.
. Soit $(A_m)_m\subset GL_n(\mathbb{R})$ convergente vers A. Posons $\varphi^{-1}(A_m)=(O_m,S_m)$ et $\varphi^{-1}(A)=(O,S)$, alors $A_m=O_mS_m$ et $A=OS$.
- La compacité de $O(n)$ nous permet d'extraire une sous-suite $(O_{\varphi(m)})_m\subset O(n)$ convergente vers $O'\in O(n)$, or $(S_{\varphi(m)})_m=({}^tO_{\varphi(m)})_mA_{\varphi(m)}$ converge d'une part par continuité du produit matriciel vers ${}^tO'A$, et d'autre part vers $S'\in S_n^+(\mathbb{R})$, car $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé, donc $S'={}^tO'A$ qui devient inversible, donc $S'\in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- L'unicité de la décomposition $A=OS=O'S'$ entraine que $O'=O$, ceci affirme que la suite $(O_m)_m$ admet une seule valeur d'adhérence dans $O(n)$, donc $(O_m)_m$ converge vers O et par suite $(S_m)_m=({}^tO_mA_m)_m$ converge vers ${}^tOA=S$.
- On vient de montrer que $\varphi^{-1}(A_m)=(O_m,S_m)$ converge vers $(O,S)=\varphi^{-1}(A)$, donc φ^{-1} est continue.

II-Deux applications

II-A Première application

II-A-1) Justifions l'égalité

En transposant et en prennant le conjugué de l'égalité $A=UBU^{-1}$, on aura ${}^tA={}^t\overline{U}^{-1}{}^tB{}^t\overline{U}$ et l'égalité $U{}^t\overline{U}=I_n$ entraine que ${}^tA=U{}^tBU^{-1}$.

II-A-2) La semblabilité dans $\mathbb{C}$ l'entraine dans $\mathbb{R}$

a) L'application $\begin{array}{rccc}P: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & det(X+xY)\end{array}$ est un polynôme réel, qui est non nul grâce à $det(X+iY)\neq 0$, donc $\exists\mu\in\mathbb{R}$ tel que $X+\mu Y\in GL_n(\mathbb{R})$.

b) L'égalité $AU=UB$ entraine que $(AX-XB)+i(AY-YB)=O_n$, or $AX-XB\in M_n(\mathbb{R})$ et $AY-YB\in M_n(\mathbb{R})$, donc $AX-XB=AY-YB=O_n$.

c) En posant $P=X+\mu Y\in GL_n(\mathbb{R})$, on aura avec les égalités précédentes $AP=A(X+\mu Y)=AX+\mu AY=XB+\mu YB=(X+\mu Y)B=PB$, et de même ${}^tAP=P{}^tB$.

II-A-3) Existence de O

a) . On a $P=OS$, donc ${}^tPP=S^2$ et d'après $(II-A-2)$, $AP=PB$ et ${}^tAP=P{}^tB$, donc ${}^tPA=B{}^tP$ et par suite $S^2B={}^tP(PB)={}^tP(AP)=({}^tPA)P=(B{}^tP)P=B({}^tPP)=BS^2$.
. $S^2\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc d'après la question $(I-B-3)$, S est un polynôme en S^2 et S^2 commute avec B, donc aussi S commute avec B.

b) Avec cette dernière égalité, on aura $A=PBP^{-1}=OSBS^{-1}{}^tO=OBSS^{-1}{}^tO=OB{}^tO$.

II-B Seconde application

II-B-1) l'existence d'une solution entraine $Sp({}^tAA)\subset[0,1[$

Soit $X\in GL_n(\mathbb{R})$ une solution du système $(*)$, alors ${}^tAA+{}^tXX=I_n$, donc $Sp(I_n-{}^tAA)=Sp({}^tXX)$, or d'après $(I-C-2)$, ${}^tXX\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et par suite $Sp(I_n-{}^tAA)\subset\mathbb{R}_+^*$, c'est à dire $\forall\lambda\in Sp({}^tAA)$, $1-\lambda>0$ et puisque ${}^tAA\in S_n^+(\mathbb{R})$ on aura $\lambda\geq 0$, ce qui entraine que $\lambda\in[0,1[$.

II-B-2 Existence d'une solution du système

a) $X\in GL_n(\mathbb{R})$, donc il existe un couple unique $(U,H)\in O(n)\times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $X=UH$, et par suite chercher X revient à chercher U et H.

b) En écrivant $X=UH$, l'égalité ${}^tAA+{}^tXX=I_n$ s'écrit $H^2=I_n-{}^tAA$, or d'après $(II-B-1)$, $I_n-{}^tAA\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et puisque $H\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ on aura H est l'unique élément de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2=I_n-{}^tAA$.(c'est la racine carrée de la matrice $I_n-{}^tAA$).

c) $A\in M_n(\mathbb{R})$, donc d'après $(I-D-4)$ il existe $U\in O(n)$, $S\in S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A=US$ et soit $H\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'unique racine de $I_n-{}^tAA$, alors $X=UH\in GL_n(\mathbb{R})$ est solution du système $(*)$. En effet :
. ${}^tAA+{}^tXX=I_n-H^2+H^2=I_n$, ce qui entraine que X vérifie la première équation du système.
. ${}^tAX-{}^tXA=S{}^tUUH-H{}^tUUS=SH-HS$, or H est un polynôme en $I_n-{}^tAA$ qui est un polynôme en ${}^tAA=S^2$ qui est donc un polynôme en S, ce qui entraine que H est un polynôme en S, donc $HS=SH$ et par suite la deuxième équation du système est vérifiée.

III-Valeurs propres d'une matrice

III-A Une relation de récurrence

. $P_1(x) = x-2$, $P_2(x) = (x-2)^2 - 1$.

. Soit $p > 2$, alors $P_p(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & x-2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)P_{p-1}(x) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ O & & 1 & x-2 \end{vmatrix} =$

$= (x-2)P_{p-1}(x) - P_{p-2}(x)$.

. La relation de récurrence est donnée par $P_0 = 1$, $P_1 = x-2$ et $\forall p \geq 2, P_p = (x-2)P_{p-1} - P_{p-2}$.

III-B Existence de θ et expression de P_p

. Soi $x \in \mathbb{R}$, tel que $|2-x| < 2$, donc $\left|\dfrac{2-x}{2}\right| < 1$, or l'application $\begin{array}{ccc}]0,\pi[& \longrightarrow &]-1,1[\\ \theta & \longmapsto & cos(\theta) \end{array}$ est une bijection, d'où l'existence d'un unique $\theta \in]0,\pi[$ tel que $\dfrac{2-x}{2} = cos(\theta)$.

. $P_1(x) = -2cos(\theta) = -\dfrac{sin(2\theta)}{sin(\theta)}$, $P_2(x) = 4cos^2(\theta) - 1 = \dfrac{sin(3\theta)}{sin(\theta)}$.

. Soit $p \geq 3$ et supposons que $P_k(x) = (-1)^k \dfrac{sin((k+1)\theta)}{sin(\theta)}$ pour tout $k \leq p$, alors

$P_{p+1}(x) = -2cos(\theta)(-1)^p \dfrac{sin((p+1)\theta)}{sin(\theta)} - (-1)^{p-1}\dfrac{sin(p\theta)}{sin(\theta)} = (-1)^{p+1}\dfrac{2cos(\theta)sin((p+1)\theta) - sin(p\theta)}{sin(\theta)}$, or $2cos(a)sin(b) = sin(a+b) - sin(a-b)$, donc $P_{p+1}(x) = (-1)^{p+1}\dfrac{sin((p+2)\theta)}{sin(\theta)}$, ce qui établit la récurrence.

III-C Valeurs propres de A_p

. x est racine de $P_p \iff (p+1)\theta = k\pi \iff \theta = \dfrac{k\pi}{p+1}$, or $\theta \in]0,\pi[$, donc $k \in]0, p+1[$, et par suite les racines de P_p sont les $x_k = 2 - 2cos\left(\dfrac{k\pi}{p+1}\right) = 4sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2(p+1)}\right)$ où $k \in [[1,p]]$.

. En conclusion $Sp(A_p) = \{4sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2(p+1)}\right) \ / \ k \in [[1,p]]\}$.

III-D Une base de vecteurs propres

. A_p est symétrique réelle, donc d'après le théorème spéctral, elle est diagonalisable.(on peut aussi dire puisqu'elle admet p valeurs propres distinctes).

. Soit $x \in Sp(A_p)$, $\theta \in]0,\pi[$ tel que $2 - x = 2cos(\theta)$ et soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la valeur propre $x = 4sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, alors on obtient le système

$$\begin{cases} -x_{k-1} + 2cos(\theta)x_k - x_{k+1} = 0 \quad \forall k \in [[1,p]] \\ x_0 = x_{p+1} = 0 \end{cases}$$

. la suite $(x_k)_{1\leq k \leq p}$ vérifie la relation de récurrence précédente d'équation caractéristique $cos^2(\theta) - 1 = (isin(\theta))^2$, donc de racines $\pm e^{i\theta}$, et par suite $x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}$, et puisque $x_0 = 0$ on obtient $x_k = -2i\alpha sin(k\theta)$, ce qui entraine que le vecteur propre associé à la valeur propre $x = 4sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est $V = \begin{pmatrix} sin(\theta) \\ sin(2\theta) \\ \vdots \\ sin(p\theta) \end{pmatrix}$ où $\theta \in \{\dfrac{\pi}{p+1}, \dfrac{2\pi}{p+1}, ..., \dfrac{p\pi}{p+1}\}$.

IV- Un équivalent d'un maximum

IV-A Existence de la matrice A

. On considère l'application $\begin{array}{cccc} \varphi : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & (M_n(\mathbb{R}))^* \\ & A & \longmapsto & \varphi(A) : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & tr(AM) \end{array} \end{array}$

. La linéarité de φ est immédiate.
. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in Ker(\varphi)$, alors $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A)(M) = tr(AM) = 0$, ce qui donne en particulier pour $M = {}^tA$, $tr({}^tAA) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2 = 0$, donc $\forall i,j \in [[1,n]], a_{i,j} = 0$, c'est à dire $A = 0$, et par suite φ est injective et vu que $dim(M_n(\mathbb{R})) = dim((M_n(\mathbb{R}))^*)$, φ devient un automorphisme.
. φ étant bijective, donc pour toute forme linéaire f de $M_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $f = \varphi(A)$, c'est à dire $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), f(M) = tr(AM)$.

IV-B IV-B-1) Existence de M_n

f étant linéaire et $dim(M_n(\mathbb{R})) < +\infty$, donc elle est continue à valeurs réelles, et $O(n)$ est un compact, ce qui assure l'existence de M_n.

IV-B-2) ${}^tAA$ admet n valeurs propres positives

La matrice ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$, donc diagonalisable et $Sp({}^tAA) \subset \mathbb{R}^+$.

IV-B-3) Une autre expression de M_n

. ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$, donc d'après le théorème spectral $\exists P \in O(n)$, $\exists D = diag(\sqrt{\mu_1}, ..., \sqrt{\mu_n})$ tel que ${}^tAA = PD^{2t}P = (PD^tP)^2 = S^2$ et soit $A = \Omega S$ la décomposition non nécessairement unique de A où $\Omega \in O(n)$ et $S = PD^tP$.
. soit $O \in O(n)$, alors $f(O) = tr(AO) = tr(\Omega SO) = tr(\Omega PD^tPO) =$
$= tr(D^tPO\Omega P) \leq \sup(\{tr(DO) \ / \ O \in O(n)\})$, donc
$\sup(\{f(O) \ / \ O \in O(n)\}) \leq \sup(\{tr(DO) \ / \ O \in O(n)\})$
. Soit $O \in O(n)$, alors $tr(DO) = tr({}^tPSPO) = tr({}^tP^t\Omega APO) = tr(APO\Omega^tP^t\Omega) \leq$
$\leq \sup(\{tr(AO) \ / \ O \in O(n)\})$, donc $\sup(\{tr(DO) \ / \ O \in O(n)\}) \leq \sup(\{tr(AO) \ / \ O \in O(n)\})$.

IV-B-4) Expression de M_n en fonction des μ_k

. $tr(DI_n) = tr(D) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k} \leq M_n$.
. S étant symétrique réelle positive , donc $\mathbb{R}^n$ admet une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de vecteurs propres de S associés aux valeurs propres $\sqrt{\mu_1}, ..., \sqrt{\mu_n}$.
. Soit $O \in O(n)$, $tr(AO) = tr(\Omega SO) = tr(O\Omega S) = \sum_{i=1}^{n} < O\Omega Se_i, e_i >=$
$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_i} < O\Omega e_i, e_i > \ \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_i}\|O\Omega e_i\|\|e_i\|$, or $O\Omega \in O(n)$, donc $\|O\Omega e_i\| = \|e_i\| = 1$, donc
$\forall O \in O(n), tr(AO) \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_i}$, ce qui entraine que $M_n \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_i}$ et par suite $M_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_i}$.

IV-C IV-C-1) La matrice A tel que $f(M)tr(AM)$

$f(M) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{j,i}m_{i,j} = tr(AM)$ où $a_{j,i} = \begin{cases} 0 & si \quad 1 \leq i \leq j-1 \\ 1 & si \quad i \geq j \end{cases}$, donc

$$A = (a_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV-C-2) Inverse de la matrice A

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors

$$AX = Y \iff \begin{cases} x_1 + x_2 \dots + x_n = y_1 \\ \quad x_2 + \dots + x_n = y_2 \\ \quad\quad \vdots \\ \quad\quad x_n = y_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall k \in [1,n]] & b_k - b_{k+1} = x_k \\ & b_{n+1} = 0 \end{cases}$$

donc l'inverse de A est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & O \\ 0 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ O & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

IV-C-3) Valeurs propres de $A^{-1t}A^{-1}$

$$B = A^{-1t}A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

. Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q_n(x) = det(xI_n - B) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-2 & 1 \\ 0 & \ddots & 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$

Une décomposition par rapport à dernière ligne entraine que, avec $2 - x = 2cos(\theta)$

$$Q_n(x) = (x-1)P_n(x) - \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & x-2 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & x-2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)P_{n-1}(x) - P_{n-2} =$$

$$= (-1)^{n-1}(1 - 2cos(\theta))\frac{sin(n\theta)}{sin(\theta)} - (-1)^{n-2}\frac{sin((n-1)\theta)}{sin(\theta)} =$$

$$= \frac{(-1)^n(2cos(\theta)sin(n\theta) - sin(n\theta) - sin((n-1)\theta))}{sin(\theta)} = \frac{(-1)^n(sin((n+1)\theta) - sin(n\theta))}{sin(\theta)} =$$

$$= \frac{(-1)^n(2cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)sin\left(\frac{\theta}{2}\right))}{sin(\theta)} = (-1)^n\frac{cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

. $Q_n(x) = 0 \iff \theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n+1} \iff x = 2(1 - cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right)) = 2(1 + cos\left(\dfrac{2(n-k)\pi}{2n+1}\right)) = 4cos^2\left(\dfrac{(n-k)\pi}{2n+1}\right)$, où $k \in [[0, n-1]]$, donc $Sp(A^{-1t}A^{-1}) = \{4cos^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) \;\; / \;\; k \in [[1, n]]\}$.

IV-C-4) Calcul de M_n

. L'inverse de ${}^tAA$ est $A^{-1t}A^{-1}$, donc $Sp({}^tAA) = \{\mu_1, ..., \mu_n\}$

avec $\mu_k = \dfrac{1}{2cos\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)}$, donc $M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

IV-C-5 Un équivalent simple de M_n

. Pour tout $k \in [[1, n]]$, $cos\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) = sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{k\pi}{2n+1}\right) = sin\left(\dfrac{2(n-k)+1}{2(2n+1)}\pi\right)$, donc

$$M_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2sin\left(\frac{2(n-k)+1}{2(2n+1)}\pi\right)} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2sin\left(\frac{2k+1}{2(2n+1)}\pi\right)}.$$

. L'égalité de taylor à l'ordre 1 et 3, appliquée à la fonction $t \longmapsto sin(t)$ sur l'intervalle $[0, x]$ pour $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, s'écrit.

. $sin(x) = x + \dfrac{1}{1!}\displaystyle\int_0^x (x-t)sin''(t)dt = x - \int_0^x (x-t)sin(t)dt \leq x$

. $sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{3!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^3 sin^{(4)}(t)dt = x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3!}\int_0^x (x-t)^3 sin(t)dt \geq x - \frac{x^3}{6}$.

. De plus $x - \dfrac{x^3}{6} = x(1 - \dfrac{x^2}{6}) \geq x(1 - \dfrac{\pi^2}{24}) > 0$, ce qui donne l'encadrement

$\forall x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[, \; 0 < x - \dfrac{x^3}{6} \leq sin(x) \leq x$.

. L'encadrement précédent fournit

$$S_n = \frac{2n+1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1} \leq M_n \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\frac{(2k+1)\pi}{2n+1} - \frac{(2k+1)^3\pi^3}{24(2n+1)^3}} = \Sigma_n.$$

. C'est clair que $S_n = \dfrac{2n+1}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k}\right) \sim \dfrac{nln(n)}{\pi}$, de plus

$\Sigma_n - S_n = \dfrac{2n+1}{2\pi}\left[\dfrac{\pi}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\dfrac{(2k+1)\pi}{12(2n+1)}}{1-\dfrac{(2k+1)^2\pi^2}{24(2n+1)^2}}\right] \leq \dfrac{2n+1}{2\pi}\left[\dfrac{\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n}\dfrac{\dfrac{k\pi}{12(2n+1)}}{1-\dfrac{k^2\pi^2}{24(2n+1)^2}}\right]$ (On a ajouté les termes paires).

. La quantité entre crochets est une somme de Riemann associée à la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $t \longmapsto \dfrac{\dfrac{t}{12}}{1-\dfrac{t^2}{24}}$, donc convergente vers $\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{\dfrac{t}{12}}{1-\dfrac{t^2}{24}}dt = \left[-ln\left(1-\dfrac{t^2}{24}\right)\right]_0^{\pi} = -ln\left(1-\dfrac{\pi^2}{24}\right)$

ceci montre que $\Sigma_n - S_n \sim Kn$ où $K = \dfrac{-1}{\pi}ln\left(1-\dfrac{\pi^2}{24}\right)$, or $Kn = o(S_n)$, donc $\Sigma_n \sim S_n$ et pa suite $M_n \sim \dfrac{nln(n)}{\pi}$.